Alexander Ziwet

NOVA ACTA
der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher
Bd. LII. Nr. 1.

Studien

über die

Kugel- und Cylinderfunctionen

von

R. Olbricht.

Mit 2 Tafeln Nr. I—II und in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Eingegangen bei der Akademie am 2. Juni 1886.

HALLE.
1887.
Druck von E. Blochmann & Sohn in Dresden.
Für die Akademie in Commission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

Seite

Vorbemerkung 5

I.

Die Kugel- und Cylinderfunction in ihrer Stellung zur Riemann'schen *P*-Function.

§ 1. Historische Entwickelung des Begriffes Kugel- und Cylinderfunction 7

§ 2. Vergleich der Differentialgleichungen der allgemeinsten Kugel- und Cylinderfunction mit der Riemann'schen *P*-Function 12

§ 3. Ueber die möglichen Darstellungsweisen der Kugel- und Cylinderfunctionen . 15

§ 4. Die zu den singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme und die Bedeutung der P, Q 21

II.

Abbildung des Quotienten der Kugel- und Cylinderfunctionen mit gleichen Indices.

§ 1. Abbildung des Quotienten zweier Kugelfunctionen 29

§ 2. Abbildung des Quotienten zweier Cylinderfunctionen 32

III.

Der Verlauf der Kugel- und Cylinderfunctionen im reellen Gebiete.

Disposition 36

§ 1. Die Curven $y = P n m$, $m \leqq n$ und $y = J m$ 37

§ 2. Die Curven $y = Q n m$, $m \leqq n$ und $y = Y m$ 40

§ 3. Die Curven der Kugelfunctionen, wenn m grösser als n ist 44

Tafel I zu III § 1 und 2.

Tafel II zu III § 3.

Vorbemerkung.

Im Seminar des Herrn Professor Dr. Klein wurde im Sommerhalbjahr 1883 die Riemann'sche Arbeit „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss-sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen" und die Schwarz'sche Abhandlung „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt" durchgenommen und ich insbesondere darauf hingewiesen, den Zusammenhang der Kugel- und Cylinderfunctionen mit der Riemann'schen P-Function aufzusuchen. Dadurch sind die beiden ersten Theile der folgenden Arbeit entstanden. So einmal auf die Kugelfunctionen geführt, beschäftigte ich mich mit dem Verlaufe derselben im reellen und complexen Gebiete. Die aufs erstere bezüglichen Resultate habe ich im dritten Theile zusammengestellt. Was die den Kugelfunctionen entsprechenden Riemann'schen Flächen betrifft, so zeigt sich, dass bei ganzzahligen Indices zwar die den Functionen erster Art zugehörigen leicht discutirt werden können, die Untersuchung für die Functionen zweiter Art sich jedoch wesentlich schwieriger gestaltet, da dieselben transcendent sind. Es ist mir gelungen, die zu den gewöhnlichen Kugelfunctionen zweiter Art gehörigen Riemann'schen Flächen aufzustellen. Man findet, dass durch die Function $w = Q_n(z)$ die Halbebene z auf ein krummliniges Dreieck mit den Winkeln $0, 0, (n+1)\pi$ abgebildet wird. Da nun aber die z-Ebene unendlich viele Blätter enthält und jedem Halbblatte ein solches Dreieck entspricht, die Contouren derselben jedoch sehr com-

plicirt sind und ihre Aneinanderfügung kaum ohne Modell deutlich gemacht werden kann, so will ich hier von einer Mittheilung des Gefundenen absehen und vielleicht an anderem Orte darauf zurückkommen. Es sei nur noch erwähnt, dass aus der Riemann'schen Fläche, welche $w = Q_2(z)$ zugehört, durch Biegung und Drehung der einzelnen Dreiecke die Riemann'schen Flächen für die Functionen mit höherem Index erhalten werden können.

I.

Die Kugel- und Cylinderfunction in ihrer Stellung zur Riemann'schen *P*-Function.

§ 1.

Historische Entwickelung des Begriffes Kugel- und Cylinderfunction.

Durch die Entwickelung der reciproken Entfernung $T = \frac{1}{e}$ zweier Punkte, von denen der eine vom Coordinatenanfangspunkt O die Entfernung 1, der andere die Entfernung α besitzt und deren Verbindungslinien mit O den Winkel ω einschliessen

$$T = \frac{1}{e} = (1 - 2\alpha \cos\omega + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

gelangte Legendre [1]) bei seinen Untersuchungen über die Sphäroide auf die Function P_n als den Coefficienten von α^n in dieser Entwickelung. Den Namen „Kugelfunction" erhielt dieselbe im Jahre 1828 von Gauss. [2])

Sie genügt einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche zuerst Laplace [3]) aufgestellt hat, und welche bei der Substitution $\cos\omega = x$ lautet:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2} \cdot y = 0. \tag{1}$$

---

[1]) Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie royale des sciences par divers savans. T. X. Paris 1785. Le Gendre: Sur l'attraction des Sphéroides. Was die Priorität betrifft, so nimmt Heine dieselbe gestützt auf Jacobi (Crelle 2, p. 223) und Dirichlet (Crelle 17, p. 35) in seinem Handbuche der Kugelfunctionen 2. Auflage I, p. 2 für Legendre in Anspruch, während Herr C. Neumann in seinem Wintersemester 1882/83 gelesenen Colleg über die Theorie des Newton'schen Potentials und der Kugelfunctionen gelegentlich die Ansicht ausgesprochen hat, dass wahrscheinlich Legendre und Laplace gleichzeitig unabhängig auf jene Function gekommen seien. — Bei Euler finden sich vorbereitende Entdeckungen über Kugelfunctionen. (Vergl. Heine, Handbuch I, p. 213.)

[2]) Werke 6, p. 684, Göttingische gelehrte Anzeigen 6. Stück. 10. Januar 1828.

[3]) Mémoires de Mathématique et de Physique, tirés des registres de l'Académie royale des sciences, Année 1782. Paris 1785. p. 133.

Das zweite von P linear unabhängige Integral dieser Gleichung führte Heine[1]) in seiner Inauguraldissertation (De aequationibus nonnullis differentialibus) vom Jahre 1842 als Kugelfunction zweiter Art ein.

In dieser Arbeit[2]) findet sich noch eine zweite Erweiterung des Begriffes Kugelfunction: Aus dem Laplace'schen Integrale für P_n

$$P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^n \, d\varphi$$

erkennt man nämlich, das P_n das von φ unabhängige Glied in der Entwickelung von $(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^n$ nach Cosinus der Vielfachen von φ ist. Heine definirt nun den Coefficienten von $\cos m\varphi$ in dieser Entwickelung als „zugeordnete“ (adjungirte) oder „abgeleitete“ Kugelfunction m-ter Stufe und erster Art. Diese Entwickelung verbunden mit der von $(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^{-n-1}$ hat auch Jacobi[3]) im Jahre 1843 unabhängig von Heine gegeben. Dieser führte aber hierdurch zuerst in seinem Handbuche I, p. 210 die Zugeordneten zweiter Art ein, nachdem er auf dieselben bereits früher[4]) gestossen war.

Hierdurch entstehen Kugelfunctionen, welche von zwei Parametern[5]) abhängig sind und welche der Differentialgleichung

$$2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)(1-x^2) - m^2}{(1-x^2)^2}\cdot y = 0$$

genügen.

Will man die Theorie der Anziehung im Raume von $p+1$ Dimensionen behandeln, so wird man auf Kugelfunctionen p-ter Ordnung als die Entwickelungscoefficienten von α in

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{p-1}{2}}$$

---

1) Heine, Handbuch I, p. 7.

2) Heine, Handbuch I, p. 214.

3) Crelle 26, p. 81: Ueber die Entwickelung des Ausdrucks
$$\left\{\alpha^2 - 2\alpha\alpha'(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')) + \alpha'^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

4) Ueber einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen (Crelle 26, p. 200, Anm. I).

5) n, m, p mögen im Folgenden immer ganzzahlige, ν, μ, π beliebige Indices bedeuten.

geführt. Diese Functionen haben ihren Ursprung auch bei Legendre[1]) und finden sich in den Arbeiten Kummer's[2]) und Jacobi's[3]). Weitere Ausführung haben sie durch Cayley[4]), Clebsch[5]), Heine[6]), Mehler[7]) und durch Herrn Scheibner[8]) erfahren. Auch sie genügen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche für $p = 2$ in 2) übergeht. Sie lautet:

$$3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{px}{1-x^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{n(n+p-1)(1-x^2) - m(m+p-2)}{(1-x^2)^2} \cdot y = o.$$

Von den Zugeordneten ausgehend kommt man noch zu einer neuen nicht minder wichtigen Erweiterung. Lässt man nämlich den Index n unendlich gross werden und theilt das Argument durch n, so entstehen, wie Mehler[9]) und Heine[10]) gezeigt haben, die Functionen:

$$J_m = \lim_{n=\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}} P_{nm}\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right),$$

$$Y_m = \lim_{n=\infty} \frac{2^{-n-1}\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} Q_{nm}\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right).$$

Auf dieselben stiess zuerst[11]) Fourier in seinem Werke über analytische

---

[1]) Kummer sagt Crelle 15, p. 64: Zu den Transcendenten, welche in der allgemeinen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ enthalten sind, gehören auch die Coefficienten der Entwickelung $(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi)^{-n} = P_0 + 2P_1\cos\varphi + \ldots$ Diese Coefficienten sind schon sehr oft untersucht worden, und Legendre hat denselben die erste Abtheilung seines Appendice au traité des fonctions elliptiques T. II, p. 531 ff. gewidmet.

[2]) Crelle 15, p. 64: Ueber die hypergeometrische Reihe.

[3]) Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. (Crelle 56, p. 158, § 5.)

[4]) Sur les fonctions de Laplace. (Liouville Journal S. I. T. XIII. 1848. p. 275.)

[5]) Ueber eine Eigenschaft der Kugelfunctionen. (Crelle 60, p. 343.)

[6]) Die speciellen Lamé'schen Functionen 1. Art von beliebig hoher Ordnung. (Crelle 62, p. 110.)

[7]) Ueber die Entwickelung einer Function von beliebig vielen Variabeln nach Laplaceschen Functionen höherer Ordnung. (Crelle 66, p. 161.)

[8]) Ueber die Berechnung einer Gattung von Functionen, welche bei der Entwickelung der Störungsfunction erscheinen. Gotha 1853.

[9]) Ueber die Vertheilung der statischen Elektricität in einem von 2 Kugelkalotten begrenzten Körper. (Crelle 68, p. 140.)

[10]) Die Fourier-Bessel'sche Function. (Crelle 69, p. 128.)

[11]) Gian Antonio Maggi erwähnt in seiner Abhandlung Sulla storia delle funzioni cilindriche (Reale Accademia dei Lincei Vol. IV°, Serie 3ª, 1880), dass die Function J_0 gelegentlich bei Daniel Bernoulli und Euler vorkommt.

Wärmetheorie [1]). Sodann behandelte sie Bessel in der Abhandlung: Untersuchungen des Theiles der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht (Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1824). Nach diesen beiden Entdeckern ist diesen Functionen theils der Name „Bessel'sche" theils „Fourier-Bessel'sche" beigelegt worden. Jetzt werden sie allgemein „Cylinderfunctionen" genannt, freilich mit wenig Berechtigung. „Handelt es sich nämlich darum, die Potentialfunction des Innenraumes T einer Kugel zu finden, welche auf der Oberfläche von T vorgeschriebene Werthe hat, so kommt man zu der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihe. Lässt man jedoch den Radius der Kugel unendlich gross werden, so gelangt man zu der nach Cylinderfunctionen fortschreitenden Integraldarstellung [2])." Die Kugeloberfläche verwandelt sich dann in eine Ebene, also müsste man consequenter Weise die Function, welche jetzt der Kugelfunction entspricht, „Planfunction" nennen und nicht, wie es geschieht, Cylinderfunction, wobei man den gar nicht in Betracht kommenden Uebergang eines aus der Kugel ausgeschnittenen Kegels in einen Cylinder im Auge hat.

Diese Functionen genügen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche man aus 2) durch Substitution von $x = \cos\frac{\vartheta}{n}$ und durch Uebergang zu unendlichem n erhält. Auf dieselbe Weise bekommt man aus den Kugelfunctionen höherer Ordnung die Cylinderfunctionen höherer Ordnung [3]) und demgemäss aus 3) die für diese geltende, in dieser Form hier zum ersten Male aufgestellte Differentialgleichung

$$4)\qquad \frac{d^2y}{d\vartheta^2} + \frac{p-1}{\vartheta}\cdot\frac{dy}{d\vartheta} + \frac{\vartheta^2 - m(m+p-2)}{\vartheta^2}\cdot y = 0,$$

welche für $p = 2$ in die sogenannte Bessel'sche Differentialgleichung übergeht.

Alle diese Functionen sind zunächst eingeführt worden unter der Voraussetzung ganzzahliger Indices. Hin und wieder finden sich nun Er-

---

[1]) Théorie analytique de la chaleur. (Paris 1822, p. 369.)

[2]) C. Neumann: Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen. Leipzig 1881, p. 2.

[3]) Heine, Handbuch I, p. 463.

weiterungen insofern, als man zu beliebigen Parametern übergegangen ist. Dies ist betreffs der Kugelfunctionen besonders von Heine, Mehler und Schläfli [1]) geschehen, indem dieselben theils von bestimmten Integralen, theils von hypergeometrischen Reihen, welche jene Functionen darstellen, ausgegangen sind; betreffs der Cylinderfunctionen von Lommel und Hankel [2]). Nirgends [3]) aber wird die Theorie dieser Functionen in allgemeinster Weise für ganz beliebige Parameter als die Theorie der particulären Integrale der Differentialgleichungen 3) und 4), welche nur Specialfälle der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe sind, behandelt, obgleich diesen Gedanken schon Kummer [4]) im Jahre 1836 ausgesprochen und dazu benutzt hat, zwei für die Rechnung bequeme Reihen für die P_{np} zu geben.

Die Theorie der hypergeometrischen Reihe, wie sie von Gauss [5]) begründet, von Kummer [4]), Jacobi [6]) und Anderen weiter entwickelt wurde, hat Riemann in präciser Form auf eigenem Wege in seiner Abhandlung: „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen" (Werke p. 62) zu einem Abschlusse gebracht. Die dort gegebenen Sätze lassen sich auf die Kugel- und Cylinderfunctionen übertragen, falls man die bei der Specialisirung eintretenden Ausnahmen beachtet. Auf diese Weise gelangt man zu einer einheitlichen Theorie dieser Functionen. Wie sich diese den Hauptzügen nach gestaltet, soll im Folgenden gezeigt werden.

---

[1]) Heine l. c. I, p. 37. Mehler, Math. Annalen 18, p. 161: Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function. Schläfli: Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunctionen mit beliebigem Parameter etc.

[2]) Lommel: Studien über die Bessel'schen Functionen; Leipzig 1868. Hankel: Die Cylinderfunction 1. und 2. Art. Math. Annalen I, p. 467.

[3]) Wie ich erfahren habe, hat Herr Prof. Scheibner in seinen seit 1856 gehaltenen Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe die Theorie dieser Reihen auf die Kugelfunctionen angewendet. Näheres ist mir nicht bekannt.

[4]) Ueber die hypergeometrische Reihe. (Crelle 15, p. 155.) Die Reihen beziehen sich auf den Punkt 1.

[5]) Disquisitiones generales circa seriem infinitam $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Werke 3, p. 127.

[6]) Siehe Seite 9, Anmerkung [3]).

§ 2.

Vergleich der Differentialgleichungen der allgemeinsten Kugel- und Cylinderfunction mit der Riemann'schen P-Function.[1]

Nach dem Vorhergehenden definiren wir

Kugelfunction erster und zweiter Art mit Index ν, von der Ordnung π und der Stufe μ als zwei bestimmte linear unabhängige Particulärintegrale der Differentialgleichung

$$5)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\pi x}{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\nu(\nu+\pi-1)(1-x^2)-\mu(\mu+\pi-2)}{(1-x^2)^2}y=o.$$

Es sind also Functionen, welche von drei beliebigen Parametern abhängig sind und, wie man aus vorstehender Gleichung erkennt, die drei Verzweigungswerthe $+1$, ∞, -1 haben. Es scheint demnach, als ob sie mit der allgemeinen P-Function, welche im Wesentlichen definirt ist durch die drei Differenzen der Exponentenpaare und die Verzweigungswerthe a, b, c, identisch wären. Dies ist jedoch, wie gezeigt werden soll, nicht der Fall.

Die Differentialgleichung der P-Function in symmetrischer Form, wie sie Herr Papperitz[2] aufgestellt hat, lautet:

$$6)\qquad \frac{d^2P}{dx^2}-\left(\frac{\alpha+\alpha'-1}{x-a}+\frac{\beta+\beta'-1}{x-b}+\frac{\gamma+\gamma'-1}{x-c}\right)\cdot\frac{dP}{dx}+$$
$$\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a}+\frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{x-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{x-c}\right\}\cdot\frac{P}{(x-a)(x-b)(x-c)}=o.$$

Diese geht in Gleichung 5) über, wenn man folgende Substitutionen ausführt:

$$a=-1\qquad b=\infty\qquad c=1,$$
$$\alpha=\frac{\mu}{2}\qquad \beta=-\nu\qquad \gamma=\frac{\mu}{2},$$
$$\alpha'=-\frac{\mu+\pi-2}{2}\qquad \beta'=\nu+\pi-1\qquad \gamma'=-\frac{\mu+\pi-2}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich die P-Function:

$$7)\qquad P\left\{\begin{matrix} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{\mu}{2} & -\nu & \frac{\mu}{2} & x \\ -\frac{\mu+\pi-2}{2} & \nu+\pi-1 & -\frac{\mu+\pi-2}{2} & \end{matrix}\right\}.$$

---

[1] Für die P-Function mag das Zeichen P, für die Kugelfunction 1. Art das Zeichen P gewählt werden.

[2] Mathem. Annalen, 25, p. 213 (2).

Hierin sind die Differenzen der Exponentenpaare

$$\mu+\frac{\pi-2}{2}, \quad -2\nu-\pi+1, \quad \mu+\frac{\pi-2}{2},$$

zwei derselben sind einander gleich, also ergiebt sich der wichtige hier zum ersten Male aufgestellte Satz:

Die Theorie der allgemeinsten Kugelfunction ist identisch mit der Theorie der P-Function, in der zwei der Exponentendifferenzen einander gleich sind.

Da hiernach die drei Parameter μ, ν, π, von welchen die Kugelfunction abhängig ist, nur zwei verschiedene Exponentendifferenzen ergeben, so ist einer von ihnen überflüssig, wenn wir nur mit Riemann diejenigen Functionen als nicht wesentlich verschieden betrachten, welche sich in die Form zusammenfassen lassen: $P(\alpha\text{-}\alpha', \beta\text{-}\beta', \gamma\text{-}\gamma', x)$ (Riemann l. c. II.). Wollen wir daher von diesem Standpunkte aus etwa die Kugelfunctionen höherer Ordnung bei Seite lassen, so finden wir durch einfache Anwendung der bei Riemann angegebenen Transformationsformel, dass dieselben aus denen zweiter Ordnung hervorgehen, falls wir die P-Function

$$8) \qquad P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{\mu'}{2} & -\nu' & \frac{\mu'}{2} & x \\ -\frac{\mu'}{2} & \nu'+1 & -\frac{\mu'}{2} & \end{Bmatrix}$$

mit $(1-x^2)^{\frac{2-\pi}{4}}$ multipliciren und in derselben

$$\mu'=\mu+\frac{\pi-2}{2}, \quad \nu'=\nu+\frac{\pi-2}{2}$$

setzen. Wir haben somit den neuen Satz gefunden:

Die Kugelfunctionen π^{ter} Ordnung mit Index ν und der Stufe μ gehen aus der P-Function 8), welche die Kugelfunctionen zweiter Ordnung mit dem Index ν' und der Stufe μ' darstellt, hervor, wenn man darin substituirt

$$\mu'=\mu+\frac{\pi-2}{2}, \quad \nu'=\nu+\frac{\pi-2}{2}$$

und die so erhaltene Function mit $(1-x^2)^{\frac{2-\pi}{4}}$ multiplicirt.

So wie wir oben (p. 9) die Cylinderfunction als Grenzfall der Kugelfunction definirt haben, werden wir sie jetzt als Grenze einer gewissen

P-Function auffassen können. Die Differentialgleichung 4) der Cylinderfunctionen erhielten wir aus 3), indem wir darin $x = \lim_{n=\infty} \cos \frac{\vartheta}{n}$ setzten. Da nun die der Gleichung 3) genügenden Functionen die singulären Stellen $-1, +1, \infty$ haben, so ergeben sich für die singulären Punkte der Gleichung 4)

$$n \arccos -1 \qquad n \arccos +1 \qquad n \arccos \infty,$$

oder beim Uebergang zur Grenze $n = \infty$

$$\lim_{n=\infty} n\pi \qquad o \qquad \infty.$$

Wir sehen also, dass durch diese Substitution der singuläre Punkt 1 nach 0 rückt, während der Punkt -1 nach Unendlich zu fallen kommt. Da nun dort bereits eine singuläre Stelle vorhanden ist, so erhalten wir daselbst nach der Weierstrass'schen Definition eine wesentlich singuläre Stelle, welche die Eigenschaft hat, dass die Function in der Nähe derselben jeden beliebigen Werth unendlich oft annimmt. Um demnach aus der Gleichung der P-Function 6) die Gleichung 4) abzuleiten, müssen wir $a = \varepsilon$, $b = \frac{1}{\varepsilon}$, $c = n$ setzen und für $\lim \varepsilon = o$, $\lim n = \infty$ die Coefficienten von $\frac{dP}{dx}$ und P so bestimmen, dass sie $\frac{p-1}{x}$ resp. $\frac{x^2 - m(m+p-2)}{x^2}$ werden. Führen wir zugleich beliebige Indices ein, indem wir für n, m, p substituiren ν, μ, π, so erhalten wir nach Ausführung der angedeuteten Rechnung folgende P-Function als Symbol der allgemeinsten Cylinderfunction:

$$\lim_{\nu=\infty} P \left\{ \begin{array}{cccc} \nu\pi & \infty & 0 & \\ \frac{1+\sqrt{1-4\nu^2}}{2} & \frac{(\pi-2)+\sqrt{(\pi-2)^2-4\nu^2}}{2} & \frac{(2-\pi)+\sqrt{(2-\pi)^2+4\mu(\mu+\pi-2)}}{2} & x \\ \frac{1-\sqrt{1-4\nu^2}}{2} & \frac{(\pi-2)-\sqrt{(\pi-2)^2-4\nu^2}}{2} & \frac{(2-\pi)-\sqrt{(2-\pi)^2+4\mu(\mu+\pi-2)}}{2} & \end{array} \right\},$$

oder, da man für sehr grosses ν 1 und $(\pi-2)^2$ gegen $4\nu^2$ vernachlässigen kann:

$$9) \quad \lim_{\nu=\infty} P \left\{ \begin{array}{cccc} \nu\pi & \infty & 0 & \\ i\nu & i\nu & \frac{1}{2}\sqrt{(2-\pi)^2+4\mu(\mu+\pi-2)} & x \\ -i\nu & -i\nu & -\frac{1}{2}\sqrt{(2-\pi)^2+4\mu(\mu+\pi-2)} & \end{array} \right\} \cdot x^{\frac{2-\pi}{2}}.$$

Bei dem Grenzübergange werden also auch hier zwei der Exponentenpaare einander gleich, womit gezeigt ist, dass alle Cylinderfunctionen mit beliebigen Indices durch jene Substitution, welche Mehler und Heine zunächst nur für die Functionen mit ganzzahligen Indices angegeben haben, aus den

Kugelfunctionen gewonnen werden können. Für $\pi = 2$, also für den Fall der gewöhnlichen Cylinderfunctionen, erhält man die einfache Form

$$10)\qquad \lim_{\nu=\infty} P\begin{Bmatrix} \nu\pi & \infty & 0 & \\ i\nu & i\nu & \mu & x \\ -i\nu & -i\nu & -\mu & \end{Bmatrix}$$

und hieraus ergiebt sich, analog wie wir für die Kugelfunctionen höherer Ordnung gefunden haben:

Die Cylinderfunctionen höherer Ordnung erhält man aus denen zweiter Ordnung, indem man die P-Function 10) mit $x^{\frac{2-\pi}{2}}$ multiplicirt und μ ersetzt durch $\frac{1}{2}\sqrt{(2-\pi)^2 + \mu(\mu+\pi-2)}$.

Die Formel 9) findet sich hier zum ersten Male, während 10) bereits in einer Abhandlung des Herrn Papperitz (Math. Annalen 25, p. 213, Anm. 2), dem ich die Ableitung früher mitgetheilt habe, abgedruckt ist.

§ 3.

Ueber die möglichen Darstellungsweisen der Kugel- und Cylinderfunctionen.

Die P-Function, in der zwei der Exponentendifferenzen einander gleich sind, lässt ausser den allgemeinen Umänderungen[1]) noch zwei besondere zu. Mit Hülfe der Riemann'schen Transformation[2]) A) erhalten wir aus unserer P-Function 8), wenn wir darin der einfacheren Schreibweise wegen die Striche an den Indices weglassen:

$$11)\qquad P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ \frac{\mu}{2} & -\nu & \frac{\mu}{2} & x \\ -\frac{\mu}{2} & \nu+1 & -\frac{\mu}{2} & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & -\frac{\nu}{2} & \frac{\mu}{2} & x^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\nu+1}{2} & -\frac{\mu}{2} & \end{Bmatrix}.$$

Die letztere geht durch Vertauschung der zweiten und dritten Verticalreihe über in

$$12)\qquad P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & \frac{\mu}{2} & -\frac{\nu}{2} & \frac{x^2}{x^2-1} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\mu}{2} & \frac{\nu+1}{2} & \end{Bmatrix},$$

---

[1]) Riemann, l. c. II.

[2]) Riemann, l. c. p. 71 A resp. I. Kummer, Crelle 15, p. 64, § 14 ff.

und hieraus ergiebt sich durch abermalige Anwendung von A)

$$\text{13)}\qquad P\begin{Bmatrix} -1 & +1 & \infty & \\ -\frac{\nu}{2} & \mu & -\frac{\nu}{2} & \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \\ \frac{\nu+1}{2} & -\mu & \frac{\nu+1}{2} & \end{Bmatrix}.$$

Führen wir in 11) und 13) auch die Verzweigungswerthe $0, \infty, 1$ ein und vertauschen in 12) die Verticalreihen, so gelangen wir zu folgenden drei wesentlich verschiedenen P-Functionen, welche die Kugelfunctionen darstellen:

$$\text{I)}\qquad P\begin{Bmatrix} 1 & \infty & 0 & \\ \frac{\mu}{2} & -\nu & \frac{\mu}{2} & x_1 \\ -\frac{\mu}{2} & \nu+1 & -\frac{\mu}{2} & \end{Bmatrix},$$

$$\text{II)}\qquad P\begin{Bmatrix} \infty & 1 & 0 & \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 & x_2 \\ \frac{\nu+1}{2} & -\frac{\mu}{2} & \frac{1}{2} & \end{Bmatrix},$$

$$\text{III)}\qquad P\begin{Bmatrix} \infty & 1 & 0 & \\ -\frac{\nu}{2} & \mu & -\frac{\nu}{2} & x_3 \\ \frac{\nu+1}{2} & -\mu & \frac{\nu+1}{2} & \end{Bmatrix}.$$

Hierin sind die Variabeln x_1, x_2, x_3, wie folgt, definirt:

$$x_1 = \frac{1-x}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{1-x^2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

Sie genügen der Riemann'schen Relation

$$x_2 = 4x_3(1-x_3) = \frac{1}{4x_1(1-x_1)},$$

welche man durch Elimination von x erhält.

Als Zusammenhang der Verzweigungswerthe der vier Variabelen findet man den folgenden: Für $x = -1, \infty, 1$ wird $x_1 = 1, \infty, 0$. Die Punkte $x = \pm 1$ liefern in der x_2- und x_3-Ebene den Punkt ∞. Aus $x = \infty$ ergiebt sich $x_2 = 0$, ausserdem aber ist x_2 noch bei 1 verzweigt, ein Werth, der $x = 0$ entspricht. Für x_3 dagegen entstehen bei $x = \infty$ die zwei singulären Stellen 0 und 1 dem doppelten Vorzeichen der Wurzel entsprechend.

Aus jeder dieser drei P-Functionen lassen sich durch die allgemein gültigen Transformationen (Riemann l. c. V.) 48 ableiten, die Identität eingerechnet, wodurch 144 verschiedene P-Functionen entstehen. Von diesen liefern aber je zwei, welche durch Vertauschung der Exponenten desselben Paares unter einander entstehen, dieselbe Entwickelung. Demnach erhält man 72 verschiedene hypergeometrische Reihen, von denen die Hälfte zu einem particulären Integrale gehört. Demnach können wir sagen:

Die Kugelfunctionen lassen sich durch 72 hypergeometrische Reihen darstellen, von denen je zwei dieselbe Veränderliche haben, und von denen für einen vorgegebenen Werth der Variabelen mindestens die Hälfte convergirt, wobei das Verhalten auf den Convergenzkreisen dahingestellt sein mag.

Aus der P-Function I) findet man die folgenden Reihen, in denen die vorn stehende Zahl zum oberen, die zweite Zahl zum unteren Zeichen gehört:

$$\left.\begin{array}{ll}
1)\ \ 5) & \left(\frac{1\mp x}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{1\pm x}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(\mu-\nu,\ \mu+\nu+1,\ \mu+1,\ \frac{1\mp x}{2}\right); \\
2)\ \ 6) & \left(\frac{1\mp x}{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\left(\frac{1\pm x}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ -\mu+1,\ \frac{1\mp x}{2}\right); \\
3)\ \ 7) & \left(\frac{1\mp x}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{1\pm x}{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ \mu+1,\ \frac{1\mp x}{2}\right); \\
4)\ \ 8) & \left(\frac{1\mp x}{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\left(\frac{1\pm x}{2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} F\left(-\mu-\nu,\ \nu+1-\mu,\ -\mu+1,\ \frac{1\mp x}{2}\right);
\end{array}\right\} P\left(\mu,\ -2\nu-1,\ \mu,\ \frac{1\mp x}{2}\right);$$

$$\left.\begin{array}{ll}
9)\ \ 13) & \left(\frac{2}{1\mp x}\right)^{-\nu}\left(\frac{x\pm 1}{x\mp 1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(\mu-\nu,\ -\nu,\ -2\nu,\ \frac{2}{1\mp x}\right); \\
10)\ \ 14) & \left(\frac{2}{1\mp x}\right)^{\nu+1}\left(\frac{x\pm 1}{x\mp 1}\right)^{+\frac{\mu}{2}} F\left(\mu+\nu+1,\ \nu+1,\ 2\nu+2,\ \frac{2}{1\mp x}\right); \\
11)\ \ 15) & \left(\frac{2}{1\mp x}\right)^{-\nu}\left(\frac{x\pm 1}{x\mp 1}\right)^{-\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ -\nu-\mu,\ -2\nu,\ \frac{2}{1\mp x}\right); \\
12)\ \ 16) & \left(\frac{2}{1\mp x}\right)^{\nu+1}\left(\frac{x\pm 1}{x\mp 1}\right)^{-\frac{\mu}{2}} F\left(\nu+1,\ \nu+1-\mu,\ 2\nu+2,\ \frac{2}{1\mp x}\right);
\end{array}\right\} P\left(-2\nu-1,\ \mu,\ \mu,\ \frac{2}{1\mp x}\right);$$

$$\left.\begin{array}{lll}
17)\ 21) & \left(\frac{x\mp1}{x\pm1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{2}{1\pm x}\right)^{-\nu} & F\left(\mu-\nu,\ -\nu,\ \mu+1,\ \frac{x\mp1}{x\pm1}\right); \\
18)\ 22) & \left(\frac{x\mp1}{x\pm1}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\left(\frac{2}{1\pm x}\right)^{-\nu} & F\left(-\nu,\ -\mu-\nu,\ -\mu+1,\ \frac{x\mp1}{x\pm1}\right); \\
19)\ 23) & \left(\frac{x\mp1}{x\pm1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{2}{1\pm x}\right)^{\nu+1} & F\left(\mu+\nu+1,\ \nu+1,\ \mu+1,\ \frac{x\mp1}{x\pm1}\right); \\
20)\ 24) & \left(\frac{x\mp1}{x\pm1}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\left(\frac{2}{1\pm x}\right)^{\nu+1} & F\left(\nu+1,\ -\mu+\nu+1,\ -\mu+1,\ \frac{x\mp1}{x\pm1}\right).
\end{array}\right\} P\left(\mu,\ \mu,\ -2\nu-1,\ \frac{x\mp1}{x\pm1}\right).$$

Die P-Function II) ergiebt:

$$\left.\begin{array}{lll}
1) & (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} & F\left(\frac{\mu-\nu}{2},\ \frac{\mu+\nu+1}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right); \\
2) & x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} & F\left(\frac{\mu-\nu+1}{2},\ \frac{\mu+\nu+2}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right); \\
3) & (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} & F\left(-\frac{\nu+\mu}{2},\ \frac{\nu+1-\mu}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right); \\
4) & x(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} & F\left(-\frac{\nu+\mu-1}{2},\ \frac{\nu-\mu+2}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right);
\end{array}\right\} P\left(\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2},\ -\mu,\ x^2\right);$$

$$\left.\begin{array}{lll}
5) & (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} & F\left(\frac{\mu-\nu}{2},\ \frac{\mu+\nu+1}{2},\ \mu+1,\ 1-x^2\right); \\
6) & x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} & F\left(\frac{\mu-\nu+1}{2},\ \frac{\mu+\nu+2}{2},\ \mu+1,\ 1-x^2\right); \\
7) & (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} & F\left(\frac{1-\mu+\nu}{2},\ -\frac{\mu+\nu}{2},\ -\mu+1,\ 1-x^2\right); \\
8) & x(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} & F\left(\frac{2-\mu+\nu}{2},\ -\frac{\mu+\nu-1}{2},\ -\mu+1,\ 1-x^2\right);
\end{array}\right\} P\left(-\mu,\ \nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1-x^2\right);$$

$$\left.\begin{array}{lll}
9) & \left(\frac{1}{x}\right)^{\mu-\nu}(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} & F\left(\frac{\mu-\nu}{2},\ \frac{\mu-\nu+1}{2},\ -\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{x^2}\right); \\
10) & \left(\frac{1}{x}\right)^{\mu+\nu+1}(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} & F\left(\frac{\mu+\nu+1}{2},\ \frac{\mu+\nu+2}{2},\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{x^2}\right); \\
11) & \left(\frac{1}{x}\right)^{-\mu+\nu+1}(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} & F\left(\frac{2-\mu+\nu}{2},\ \frac{1-\mu+\nu}{2},\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{x^2}\right); \\
12) & \left(\frac{1}{x}\right)^{-\mu-\nu}(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} & F\left(-\frac{\mu+\nu-1}{2},\ -\frac{\mu+\nu}{2},\ -\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{x^2}\right);
\end{array}\right\} P\left(\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\mu,\ \frac{1}{x^2}\right);$$

$$\left.\begin{array}{ll}
13) & (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \quad F\left(\frac{\mu-\nu}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}, -\nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{1-x^2}\right); \\[2ex]
14) & (1-x^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} F\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{1-\mu+\nu}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{1-x^2}\right); \\[2ex]
15) & (1-x^2)^{\frac{\nu-1}{2}} x.F\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}, -\nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{1-x^2}\right); \\[2ex]
16) & (1-x^2)^{-\frac{\nu+2}{2}} x.F\left(\frac{\mu+\nu+2}{2}, \frac{2-\mu+\nu}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{1-x^2}\right);
\end{array}\right\} P\left(\nu+\frac{1}{2}, -\mu, \frac{1}{2}, \frac{1}{1-x^2}\right);$$

$$\left.\begin{array}{ll}
17) & (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \quad F\left(\frac{\mu-\nu}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{x^2-1}\right); \\[2ex]
18) & (1-x^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad F\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{x^2-1}\right); \\[2ex]
19) & x\,(1-x^2)^{\frac{\nu-1}{2}} \quad F\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}, -\frac{\mu+\nu-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{x^2-1}\right); \\[2ex]
20) & x\,(1-x^2)^{-\frac{\nu+2}{2}} F\left(\frac{\mu+\nu+2}{2}, \frac{2-\mu+\nu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{x^2-1}\right);
\end{array}\right\} P\left(\frac{1}{2}, -\mu, \nu+\frac{1}{2}, \frac{x^2}{x^2-1}\right);$$

$$\left.\begin{array}{ll}
21) & x^{-\mu+\nu}(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \quad F\left(\frac{\mu-\nu}{2}, \frac{\mu-\nu+1}{2}, \mu+1, \frac{x^2-1}{x^2}\right); \\[2ex]
22) & x^{-(\mu+\nu+1)}(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} F\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2}, \mu+1, \frac{x^2-1}{x^2}\right); \\[2ex]
23) & x^{\mu-\nu-1}(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \quad F\left(\frac{2-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu+\nu}{2}, -\mu+1, \frac{x^2-1}{x^2}\right); \\[2ex]
24) & x^{\mu+\nu}(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \quad F\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}, -\mu+1, \frac{x^2-1}{x^2}\right).
\end{array}\right\} P\left(-\mu, \frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}, \frac{x^2-1}{x^2}\right).$$

Function III) endlich liefert die Reihen:

$$\left.\begin{array}{lll}
1) & 5) & \left(\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}\mp x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^{-\frac{\nu}{2}} F\left(\mu-\nu, -\mu-\nu, \frac{1}{2}-\nu, \frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{2\sqrt{x^2-1}}\right); \\[2ex]
2) & 6) & \left(\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}\mp x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} F\left(\frac{1}{2}-\mu, \frac{1}{2}+\mu, \frac{1}{2}-\nu, \frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{2\sqrt{x^2-1}}\right); \\[2ex]
3) & 7) & \left(\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}\mp x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^{-\frac{\nu}{2}} F\left(\frac{1}{2}+\mu, \frac{1}{2}-\mu, \frac{3}{2}+\nu, \frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{2\sqrt{x^2-1}}\right); \\[2ex]
4) & 8) & \left(\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}\mp x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} F\left(1-\mu+\nu, 1+\mu+\nu, \frac{3}{2}+\nu, \frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{2\sqrt{x^2-1}}\right);
\end{array}\right\} \begin{array}{l} P\left(-\nu-\frac{1}{2}, 2\mu,\right. \\ \left.-\nu-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{2\sqrt{x^2-1}}\right); \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
9)\ 13) & \left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right)^{\mu}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}\mp x}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right)^{-\frac{\nu}{2}} F\left(\mu-\nu,\ \frac{1}{2}+\mu,\ 2\mu+1,\ \frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right); \\
10)\ 14) & \left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right)^{-\mu}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}\mp x}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right)^{-\frac{\nu}{2}} F\left(-\mu-\nu,\ \frac{1}{2}-\mu,\ -2\mu+1,\ \frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right); \\
11)\ 15) & \left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right)^{-\mu}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}\mp x}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} F\left(1-\mu+\nu,\ \frac{1}{2}-\mu,\ -2\mu+1,\ \frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right); \\
12)\ 16) & \left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right)^{\mu}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}\mp x}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} F\left(\mu+\nu+1,\ \frac{1}{2}+\mu,\ 2\mu+1,\ \frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right);
\end{array}\right\} \begin{array}{l} P\left(2\mu,\ -\nu-\frac{1}{2},\right. \\ \left.-\nu-\frac{1}{2},\ \frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\pm x}\right); \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
17)\ 21) & \left(\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\right)^{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\right)^{\mu} F\left(\mu-\nu,\ \frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ \frac{x\pm\sqrt{x^2-1}}{x\mp\sqrt{x^2-1}}\right); \\
18)\ 22) & \left(\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\right)^{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\right)^{-\mu} F\left(-\mu-\nu,\ \frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ \frac{x\pm\sqrt{x^2-1}}{x\mp\sqrt{x^2-1}}\right); \\
19)\ 23) & \left(\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\right)^{\mu} F\left(\mu+\frac{1}{2},\ 1+\mu+\nu,\ \frac{3}{2}+\nu,\ \frac{x\pm\sqrt{x^2-1}}{x\mp\sqrt{x^2-1}}\right); \\
20)\ 24) & \left(\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\right)^{-\mu} F\left(-\mu+\frac{1}{2},\ 1-\mu+\nu,\ \frac{3}{2}+\nu,\ \frac{x\pm\sqrt{x^2-1}}{x\mp\sqrt{x^2-1}}\right).
\end{array}\right\} \begin{array}{l} P\left(-\nu-\frac{1}{2},\ -\nu-\frac{1}{2},\right. \\ \left.2\mu,\ \frac{x\pm\sqrt{x^2-1}}{x\mp\sqrt{x^2-1}}\right). \end{array}$$

Was die Integraldarstellungen betrifft, so fliessen aus jeder P-Function 48 bestimmte Integrale, welche je nach der Wahl der Grenzwerthe und des Weges von einem zum andern die einzelnen Zweige der Function darstellen. Es ergiebt die Anwendung der hierauf bezüglichen Riemann'schen Sätze (Riemann l. c. VII, VIII):

Die Kugelfunctionen lassen sich durch 144 bestimmte Integrale darstellen, die sämmtlich verschieden sind und sich in 6 Gruppen von je 24 ordnen lassen, welche sich durch lineare Substitutionen in einander transformiren.

Auf die P-Function

$$\text{IV)}\ .\ \lim_{\nu=\infty}\left\{\begin{array}{cccc} \nu\pi & \infty & 0 & \\ i\nu & i\nu & \mu & x \\ -i\nu & -i\nu & -\mu & \end{array}\right\},$$

die wir als Ausdruck der Cylinderfunctionen gefunden haben, könnte man dieselben Transformationen, welche wir für die Kugelfunctionen durchgeführt haben, anwenden. Man würde dann auf 72 Reihen kommen, welche als blosse

Symbole unserer Function aufzufassen sind. Von denselben sind jedoch nur die P^{μ}, $P^{-\mu}$, also 24 brauchbar, da eine Entwickelung für die wesentlich singuläre Stelle nicht existiren kann. Diese reduciren sich auf die Hälfte, weil eine Vertauschung von $i\nu$ mit $-i\nu$ keine Aenderung hervorruft. Diese 12 Symbole können nur dann eine wirkliche Darstellung der Cylinderfunctionen liefern, wenn sich der Grenzübergang vollziehen lässt, und es scheint mir, als ob hierzu die bestimmten Integrale, welche den betreffenden hypergeometrischen Reihen entsprechend sind, geeigneter wären.

Aus den Relationen zwischen den contiguen Functionen kann man unmittelbar die recurrenten Gleichungen zwischen den Kugelfunctionen und ihren Differentialquotienten, von denen eine grosse Anzahl in Herrn F. Neumanns Beiträgen zur Theorie der Kugelfunctionen p. 60 ff. aufgestellt sind, und zwischen den Cylinderfunctionen nebst ihren Ableitungen finden und auf beliebige Parameter ausdehnen.

§ 4.

Die zu den singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme und die Bedeutung der P, Q.

Die P-Functionen lassen sich für die singulären Punkte durch Reihen darstellen, welche mit gewissen Potenzen von x multiplicirt, einändrig bleiben und weder 0 noch ∞ werden. Diese Reihen werden nach Fuchs [1]) die zum singulären Punkte gehörigen Fundamentalsysteme genannt.

Es entsteht also die Frage, wie lauten diese Fundamentalsysteme für die P-Functionen I—IV des vorigen Paragraphen, und in welchem Zusammenhange stehen sie mit den Kugel- resp. Cylinderfunctionen?

Wir führen dies betreffs der Kugelfunctionen nur für II) durch, da sich I) und III) analog behandeln lassen.

Unter der Voraussetzung, dass keine der Exponentendifferenzen

$$\nu + \frac{1}{2}, \quad -\mu\,, \quad \frac{1}{2}$$

der P-Function II) eine ganze Zahl, d. h. also, dass μ keine ganze Zahl und

[1]) Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Crelle 66, p. 121; 86, p. 354.)

ν nicht von der Form $\frac{2k+1}{2}$ (unter k eine ganze Zahl verstanden) sei, erhält man ohne Weiteres die Fundamentallösungen:

$$\text{bei } 0 \begin{cases} (x^2)^0 \quad \mathfrak{P}(x^2), \\ (x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \mathfrak{P}(x^2); \end{cases}$$

$$\text{bei } 1 \begin{cases} (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \quad \mathfrak{P}(1-x^2), \\ (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \quad \mathfrak{P}(1-x^2); \end{cases}$$

$$\text{bei } \infty \begin{cases} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{\nu}{2}} \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right), \\ \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right), \end{cases}$$

wobei die $\mathfrak{P}$ nach der gewöhnlichen Schreibweise Potenzreihen bedeuten. Für diese finden wir aus den in § 3 unter II) aufgestellten hypergeometrischen Reihen, wenn wir die Riemann'schen P^{α}, P^{β}, P^{γ} mit U, die $P^{\alpha'}$, $P^{\beta'}$, $P^{\gamma'}$ mit V bezeichnen:

$$\text{bei } 0 \begin{cases} U^0_{\mu\nu} = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \quad F\left(\frac{\mu-\nu}{2}, \frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right); & 1) \\ \quad\;\; = (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \quad F\left(-\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{\nu+1-\mu}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right); & 3) \\ V^0_{\mu\nu} = x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \quad F\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}, \frac{\nu+\mu+2}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right); & 2) \\ \quad\;\; = x(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \quad F\left(-\frac{\nu+\mu-1}{2}, \frac{\nu-\mu+2}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right); & 4) \end{cases}$$

$$\text{bei } 1 \begin{cases} U^1_{\mu\nu} = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \quad F\left(\frac{\mu-\nu}{2}, \frac{\mu+\nu+1}{2}, \mu+1, 1-x^2\right); & 5) \\ \quad\;\; = x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \quad F\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2}, \mu+1, 1-x^2\right); & 6) \\ V^1_{\mu\nu} = (1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \quad F\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}, -\mu+1, 1-x^2\right); & 7) \\ \quad\;\; = x(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \quad F\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}, -\mu+1, 1-x^2\right); & 8) \end{cases}$$

bei ∞

$$U^{\infty}_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{\nu}{2}} \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(\frac{\mu-\nu}{2}, \frac{\mu-\nu+1}{2}, -\nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{x^2}\right); \quad 9)$$

$$= \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{\nu}{2}} \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} F\left(-\frac{\mu+\nu-1}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}, -\nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{x^2}\right); \quad 12)$$

$$V^{\infty}_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{x^2}\right); \quad 10)$$

$$= \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{-\frac{\mu}{2}} F\left(\frac{2-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu+\nu}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{x^2}\right). \quad 11)$$

Hierbei genügen die U und V folgenden linearen Relationen:

$$U^0 = \alpha_\beta\, U^\infty + \alpha_{\beta'}\, V^\infty = \alpha_\gamma\, U^1 + \alpha_{\gamma'}\, V^1,$$
$$V^0 = \alpha'_\beta\, U^\infty + \alpha'_{\beta'}\, V^\infty = \alpha'_\gamma\, U^1 + \alpha'_{\gamma'}\, V^1,$$

deren Constanten α die vier bei Riemann angegebenen Gleichungen erfüllen. Diese lauten in unserem Falle:

$$\frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}} = -i \operatorname{tg}\frac{\mu-\nu}{2}\pi \,.\, \frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta} = \quad i \operatorname{cotg}\frac{\mu+\nu}{2}\pi \,.\, \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}},$$

$$\frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma} = \quad i \operatorname{tg}\frac{\mu+\nu}{2}\pi \,.\, \frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta} = -i \operatorname{cotg}\frac{\mu-\nu}{2}\pi \,.\, \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}.$$

Mit Hülfe hiervon und mit Benutzung der Grössen, welche obige Reihen für specielle Werthe der Veränderlichen annehmen, finde ich bei positiven μ und ν unter der Voraussetzung, dass U^0 und V^0 den Coefficienten 1 haben, die Gleichungen:

$$\alpha_\beta = \frac{\Gamma\frac{3}{2} \quad \Gamma\frac{\mu-\nu+1}{2}}{\Gamma\frac{1-2\nu}{2}\;\Gamma\frac{\nu+\mu+1}{2}} \cdot \frac{2i \operatorname{tg}\frac{\mu+\nu}{2}\pi + 1}{\operatorname{tg}\frac{\mu+\nu}{2}\pi \operatorname{tg}\frac{\mu-\nu}{2}\pi + 1},$$

$$\alpha_{\beta'} = \frac{\Gamma\frac{3}{2} \quad \Gamma\frac{\nu+\mu+2}{2}}{\Gamma\nu+\frac{3}{2}\;\Gamma\frac{\mu-\nu}{2}} \cdot \frac{2i - \operatorname{tg}\frac{\mu-\nu}{2}\pi}{\operatorname{tg}\frac{\mu-\nu}{2}\pi + \operatorname{cotg}\frac{\mu+\nu}{2}\pi},$$

$$\alpha_\gamma = \frac{\Gamma\frac{\nu+\mu+2}{2}\;\Gamma\frac{\mu-\nu+1}{2}}{\Gamma\mu+1 \quad \Gamma\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\mu-\nu}{2}\pi \sin\frac{\mu+\nu}{2}\pi}{\sin\mu\pi},$$

$$\alpha_{\gamma'} = \frac{\Gamma\frac{1}{2} \quad \Gamma\mu}{\Gamma\frac{\nu+\mu+1}{2}\;\Gamma\frac{\mu-\nu}{2}},$$

$$\alpha'_\beta = \frac{\Gamma\frac{3}{2}\ \Gamma\frac{\mu-\nu}{2}}{\Gamma\frac{1-2\nu}{2}\ \Gamma\frac{\nu+\mu+2}{2}} \cdot \frac{2\,i\,\mathrm{tg}\frac{\mu+\nu}{2}\pi+1}{2\,i\left(\mathrm{tg}\frac{\mu+\nu}{2}\pi+\mathrm{cotg}\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right)},$$

$$\alpha'_{\beta'} = \frac{\Gamma\frac{3}{2}\ \Gamma\frac{\nu+\mu+1}{2}}{\Gamma\,\nu+\frac{3}{2}\ \Gamma\frac{\mu-\nu+1}{2}} \cdot \frac{2\,i-\mathrm{tg}\frac{\mu-\nu}{2}\pi}{2\,i\left(\mathrm{tg}\frac{\mu+\nu}{2}\pi\,\mathrm{tg}\frac{\mu-\nu}{2}\pi+1\right)},$$

$$\alpha'_\gamma = \frac{\Gamma\frac{3}{2}\ \Gamma-\mu}{\Gamma\frac{1-\mu-\nu}{2}\ \Gamma\frac{\nu-\mu+2}{2}} = -\frac{\Gamma\frac{3}{2}\ \Gamma\frac{1+\mu+\nu}{2}}{\Gamma\frac{\nu-\mu+2}{2}\ \Gamma\,\mu+1} \cdot \frac{\cos\frac{\mu+\nu}{2}\pi}{\sin\mu\pi},$$

$$\alpha'_{\gamma'} = \frac{\Gamma\frac{3}{2}\ \Gamma\mu}{\Gamma\frac{\nu+\mu+2}{2}\ \Gamma\frac{\mu+1-\nu}{2}}.$$

Aus den U und V müssen sich nun die Kugelfunctionen P und Q mit constanten Coefficienten linear zusammensetzen.

Die Kugelfunctionen erster Art werden dargestellt durch die Legendresche Reihe

$$P_{\nu\mu} = c\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1+\mu,\ \frac{1-x}{2}\right);$$

und Hermite hat gezeigt,[1]) dass man hieraus die zweiter Art erhält, wenn man für x $-x$ einsetzt, wobei aber μ keine ganze Zahl sein darf.

Demnach muss gelten:

$$c'P_{\nu\mu} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1+\mu,\ \frac{1-x}{2}\right) = \alpha\,U^0(x)+\beta\,V^0(x)$$

$$c''Q_{\nu\mu} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1+\mu,\ \frac{1+x}{2}\right) = \alpha\,U^0(-x)+\beta\,V^0(-x)$$

also:

$$(1-x)^\mu\ F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1+\mu,\ \frac{1-x}{2}\right) = \alpha\,F\left(-\frac{\nu+\mu}{2},\ \frac{\nu+1-\mu}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right)+$$
$$\beta\,x\,F\left(-\frac{\nu+\mu+1}{2},\ \frac{\nu-\mu+2}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right).$$

Hieraus ergiebt sich für $x=1$

$$0 = \alpha\,\frac{\Gamma\frac{1}{2}\ \Gamma\mu}{\Gamma\frac{\mu+\nu+1}{2}\ \Gamma\frac{\mu-\nu}{2}} + \beta\,\frac{\Gamma\frac{3}{2}\ \Gamma\mu}{\Gamma\frac{\nu+\mu+2}{2}\ \Gamma\frac{\mu-\nu+1}{2}}$$

---

[1]) Heine, Handbuch II, p. 237 und 364.

und für $x = -1$

$$2^{\mu} \frac{\Gamma \mu+1}{\Gamma \mu+\nu+1} \frac{\Gamma \mu}{\Gamma \mu-\nu} = \alpha \frac{\Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma \frac{\mu+\nu+1}{2}} \frac{\Gamma \mu}{\Gamma \frac{\mu-\nu}{2}} - \beta \frac{\Gamma \frac{3}{2}}{\Gamma \frac{\nu+\mu+2}{2}} \frac{\Gamma \mu}{\Gamma \frac{\mu-\nu+1}{2}}.$$

Also ist

$$\alpha = 2^{\mu-1} \frac{\Gamma \mu+1}{\Gamma \mu+\nu+1\ \Gamma \mu-\nu} \frac{\Gamma \frac{\mu+\nu+1}{2}\ \Gamma \frac{\mu-\nu}{2}}{\Gamma \frac{1}{2}},$$

$$\beta = -2^{\mu} \frac{\Gamma \mu+1}{\Gamma \mu+\nu+1\ \Gamma \mu-\nu} \frac{\Gamma \frac{\nu+\mu+2}{2}\ \Gamma \frac{\mu-\nu+1}{2}}{\Gamma \frac{1}{2}}.$$

Wir finden demnach für die Kugelfunctionen erster Art

$$\text{a)}\quad P_{\nu\mu} = 2^{\mu-1} \frac{\Gamma \mu+1}{\Gamma \mu-\nu\ \Gamma \frac{1}{2}\ \Gamma \mu+\nu+1} \left\{\Gamma \frac{\mu+\nu+1}{2}\ \Gamma \frac{\mu-\nu}{2}\ U^{0}_{\nu\mu}(x) - 2\ \Gamma \frac{\nu+\mu+2}{2}\ \Gamma \frac{\mu-\nu+1}{2}\ V^{0}_{\nu\mu}(x)\right\}$$

und für die zweite Art aus dem Hermite'schen Satze:

$$\text{b)}\quad Q_{\nu\mu} = 2^{\mu-1} \frac{\Gamma \mu+1}{\Gamma \mu-\nu\ \Gamma \frac{1}{2}\ \Gamma \mu+\nu+1} \left\{\Gamma \frac{\mu+\nu+1}{2}\ \Gamma \frac{\mu-\nu}{2}\ U^{0}_{\nu\mu}(x) + 2\ \Gamma \frac{\nu+\mu+2}{2}\ \Gamma \frac{\mu-\nu+1}{2}\ V^{0}_{\nu\mu}(x)\right\}.$$

Mit Hülfe des Zusammenhanges, den wir zwischen den U und V gefunden haben, ist es leicht möglich, Darstellungen der P und Q für die Punkte 1 und ∞ zu finden. Jede der Reihen 13)—24) der P-Function II) ist gleichwerthig mit einer der Reihen 1)—12), so dass also zu jedem U und V vier Reihen gehören. Demnach fliessen aus der P-Function II) im Ganzen 12 Darstellungen für die P und ebensoviel für die Q. Die gleiche Anzahl erhält man aus den Functionen I) und III), im Ganzen also je 36 Ausdrücke für P und Q.

Aus den Reihen der U und V ergeben sich unter Zuhülfenahme der gleichwerthigen Reihen für negatives μ und ν die Relationen:

$$U^{0}_{\nu\mu} = U^{0}_{-\nu-1,\mu}, \qquad U^{1}_{\nu\mu} = U^{1}_{-\nu-1,\mu}, \qquad U^{\infty}_{\nu\mu} = V^{\infty}_{-\nu-1,\mu},$$

$$V^{0}_{\nu\mu} = V^{0}_{-\nu-1,\mu}, \qquad V^{1}_{\nu\mu} = V^{1}_{-\nu-1,\mu}, \qquad V^{\infty}_{\nu\mu} = U^{\infty}_{-\nu-1,\mu},$$

$$U^{0}_{\nu\mu} = U^{0}_{\nu,-\mu}, \qquad U^{1}_{\nu\mu} = V^{1}_{\nu,-\mu}, \qquad U^{\infty}_{\nu\mu} = U^{\infty}_{\nu,-\mu},$$

$$V^{0}_{\nu\mu} = V_{\nu,-\mu}, \qquad V^{1}_{\nu\mu} = U^{1}_{\nu,-\mu}, \qquad V^{\infty}_{\nu\mu} = V^{\infty}_{\nu,-\mu},$$

und demgemäss analoge für die P und Q, womit die oben gemachte Voraussetzung, dass μ und ν positiv sein sollten, berücksichtigt ist.

Im Eingange dieses Paragraphen hatten wir festgesetzt, dass ν nicht die Form $\frac{2k+1}{2}$ haben solle, unter k eine ganze Zahl verstanden. Nimmt es aber einen solchen Werth an, so verliert $U^{\infty}_{\mu\nu}$ seine Bedeutung, da in der Reihe $F\left(-\frac{\mu+\nu-1}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}, -\nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{x^2}\right)$ ein Glied auftritt, welches unendlich wird. Ferner werden α_β und α'_β wegen des Factors $\Gamma\frac{1-2\nu}{2}$ null, während die übrigen Darstellungen bestehen bleiben. Daher gilt der Satz:

Die Ausdrücke der Kugelfunctionen für die Werthe $x = 0$ und $x = 1$ bleiben bestehen für jeden Werth von ν unter der Voraussetzung, dass μ keine ganze Zahl bedeutet.

Ist nun aber μ ganzzahlig, so wird ein Glied von $V^1_{\nu\mu}$ und α_γ und α'_γ unendlich, die Darstellung im Punkte 1 also illusorisch, während die anderen bestehen bleiben, wenn der in P und Q auftretende Factor $\Gamma(\mu-\nu)$ einen endlichen und von 0 verschiedenen Werth hat, d. h.:

Bei ganzzahligem μ gelten die gewonnenen Darstellungen der Kugelfunctionen für die Punkte 0 und ∞, vorausgesetzt, dass ν nicht ganzzahlig ist oder die Form $\frac{2k+1}{2}$ hat.

Diese beiden Sätze folgen auch unmittelbar aus der Riemann'schen Theorie: Da nämlich die Exponentendifferenz des Punktes 1 in der P-Function II) nur von μ, die des Punktes ∞ nur von ν abhängt, während die zu 0 gehörigen Exponenten von μ und ν frei sind, so kann ein Ganzzahligwerden von μ auf die Darstellungen in den Punkten 0 und ∞, ebenso ein Werden von $\nu = \frac{2k+1}{2}$ auf die Darstellungen in den Punkten 0 und 1 von keinem Einflusse sein.

Besonders wichtig ist der Fall, dass μ und ν ganzzahlig werden, also $\mu = m$, $\nu = n$. U_0 und V_0 sind auch dann noch linear unabhängige Particulärintegrale. Die Gleichungen a) und b) haben aber wegen des Factors $\Gamma(m-n)$ nur noch eine Bedeutung, wenn $m > n$ ist. Sie geben folglich auch da noch Ausdrücke für die Kugelfunctionen. In diesem Falle wird a) (P_{nm}) identisch mit dem T_{nj} und b) (Q_{nm}) identisch mit dem S_{nj} des Herrn F. Neumann (Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen).

Wird jedoch $m \leqq n$, so können wir unsere Darstellungen nicht mehr gebrauchen. Die Theorie der linearen Differentialgleichungen von Fuchs [1])

[1]) Siehe Anmerkung [1]) S. 21.

und Hamburger[1]) und die Mittheilungen Spitzers und Borchardts im Crelle'schen Journal (t. 57) zeigen, dass dann im Allgemeinen die Particulärintegrale die folgende Gestalt haben:

$$y_1 = P\alpha ,$$
$$y_2 = P\alpha' + \log (x - a)\, P\alpha .$$

Für die Kugelfunctionen insbesondere finden wir, wenn wir nur als bekannt voraussetzen, dass P_n eine ganze Function n-ten Grades ist, das Folgende:

Aus dem Abel'schen Satze, dass zwischen den linear unabhängigen particulären Integralen y_1 und y_2 der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + p \frac{dy}{dx} + q y = 0$$

die Relation besteht:

$$y_2 y_1' - y_2' y_1 = C \cdot e^{-\int p\, dx}$$

ergiebt sich für die Integrale $y_2 = P_n$, $y_1 = Q_n$ der Differentialgleichung der Kugelfunctionen:

$$\text{c)} \qquad Q_n = C P_n \int \frac{dx}{(1-x^2) P_n^2} .$$

Für den Punkt $x = \infty$ kann die Function unter dem Integralzeichen in eine gleichmässig convergente Reihe nach Potenzen von $\frac{1}{x}$, deren erstes Glied $\frac{1}{x^{2n+2}}$ ist, entwickelt werden. Durch gliedweise Integration erhält man hieraus

$$Q_n = P_n \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

oder nach Ausführung der Multiplication mit P_n

$$Q_n = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) .$$

Also ist das zum Punkte $x = \infty$ gehörige Fundamentalsystem

$$\text{bei } \infty \begin{cases} P_n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) , \\ Q_n = \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) . \end{cases}$$

Betrachtet man jedoch die Gleichung c) für die Punkte $x = \pm 1$, so erkennt man, dass bei der Integration der Reihe ein logarithmisches Glied auftritt. Also hat man hierfür die Fundamentalsysteme

[1]) Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Crelle 76, p. 113.)

$$\text{bei } \mp 1 \begin{cases} P_n = \mathfrak{P}_1 (x \pm 1) \\ Q_n = \mathfrak{P}_2 (x \pm 1) + \mathfrak{P}_1 (x \pm 1) \log (x \pm 1). \end{cases}$$

Da nun die Zugeordneten für ganzzahlige Indices definirt sind durch:

$$P_{nm} = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m},$$

$$Q_{nm} = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n}{dx^m},$$

so ergiebt sich sofort bei ∞ das System:

$$\begin{cases} P_{nm} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right), \\ Q_{nm} = \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right), \end{cases}$$

und nach einfacher Ueberlegung bei $x = \mp 1$

$$\begin{cases} P_{nm} = (1 \pm x)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{P}_3 (x \pm 1), \\ Q_{nm} = (1 \pm x)^{-\frac{m}{2}} \left\{ \mathfrak{P}_4 (x \pm 1) + \mathfrak{P}_3 (x \pm 1) \log (x \pm 1) \right\}. \end{cases}$$

Was diese Potenzreihen selbst betrifft, so sind dieselben durch die Theorie der gewöhnlichen Kugelfunctionen hinlänglich bekannt.

Nunmehr bleibt noch übrig, dies auch für die P-Function IV, also die Cylinderfunctionen, durchzuführen.

Für dieselben können wir nur ein Fundamentalsystem, nämlich für den Punkt 0 haben, da der Punkt ∞ eine wesentlich singuläre Stelle ist. Aus der P-Function folgt sofort bei beliebigem μ

$$\text{bei } 0 \begin{cases} x^{\mu} \mathfrak{P}(x), \\ x^{-\mu} \mathfrak{P}(x). \end{cases}$$

Ist jedoch μ eine ganze Zahl, so tritt ebenfalls ein Logarithmus auf. Da wir nämlich gesehen haben, dass die Cylinderfunctionen durch einen gewissen Grenzprocess aus den Kugelfunctionen gewonnen werden, bei dem der singuläre Punkt 1 nach 0 rückt, so erhält man für die ersteren im Punkte 0 die analoge Darstellung, die für die letzteren im Punkte 1 gilt, also

$$x^m \mathfrak{P}_1 (x),$$
$$x^{-m} (\mathfrak{P}_2 (x) + \log x \, \mathfrak{P}_1 (x)).$$

Betreffs dieser Potenzreihen verweise ich auf die schon erwähnten Schriften von Hankel, Lommel und C. Neumann über Cylinderfunctionen.

II.

Abbildung des Quotienten der Kugel- und Cylinderfunction erster und zweiter Art mit gleichen Indices.

§ 1.

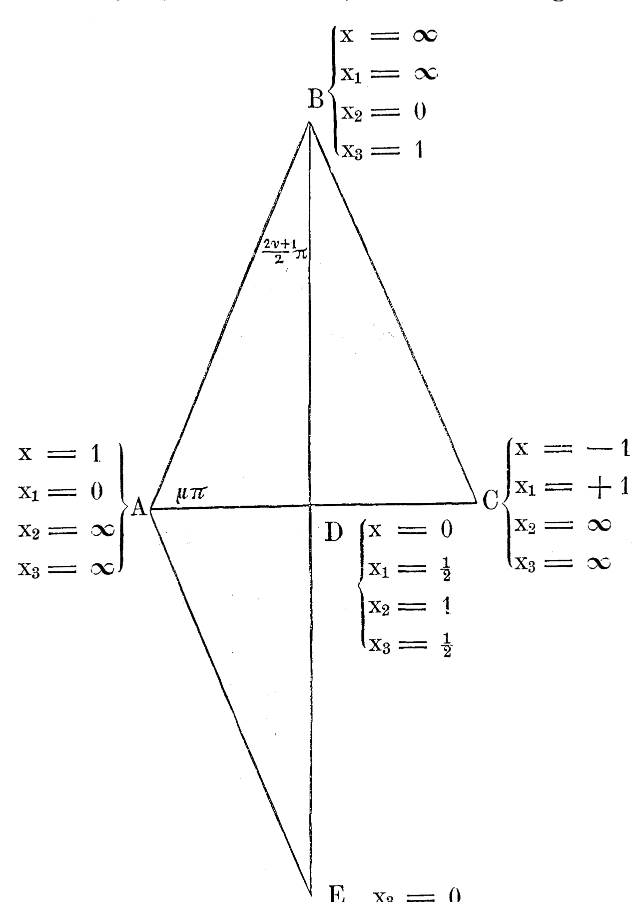
Abbildung des Quotienten zweier Kugelfunctionen.

Die in § 3 des vorangehenden Theiles gewonnenen Darstellungen können wir dazu benutzen, mit Hülfe der von Schwarz (Crelle 75, p. 292) gefundenen Resultate die Abbildung des Quotienten der Kugelfunctionen erster und zweiter Art mit gleichen Indices zu finden und dadurch neue Klarheit allerdings nur in speciellen Fällen zu gewinnen. Es wird daselbst p. 311 der Satz aufgestellt, dass der Quotient zweier linear unabhängiger Functionen $P(\lambda', \mu', \nu', x)$ für reelle $\lambda'^2, \mu'^2, \nu'^2$ die Halbebene x auf ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda'\pi, \mu'\pi, \nu'\pi$ abbildet, in dessen Innerem keine Windungspunkte auftreten können. Diesen Satz können wir sofort auf die drei P-Functionen, welche unsere Kugelfunctionen darstellen, anwenden. Dadurch finden wir:

Der Quotient der beiden linear unabhängigen Kugelfunctionen, die aus I) und III) hervorgehen, bildet die Halbebene x_1 und x_3 auf ein gleichschenkeliges Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\mu\pi, (2\nu+1)\pi, \mu\pi$ bezüglich $\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi,\ 2\mu\pi,\ \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi$ ab, während die P-Function II) auf ein rechtwinkeliges Dreieck führt, dessen andere Winkel die Werthe $\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi$ und $\mu\pi$ haben.

Was die Gestaltung dieser Dreiecke bei reellem μ und ν betrifft, so ist dieselbe, wenn man nur die an den Ecken entstehenden Windungen und die

daraus sich ergebenden Ueberdeckungen der Dreiecke beachtet, leicht herzustellen. Wir begnügen uns daher, diese Abbildung nur in schematischer Weise zu geben, um das Verhältniss der drei P-Functionen und der daraus hervorgehenden Dreiecke zu charakterisiren. A B C sei das Bild der positiven x_1-Ebene. Geht man in derselben auf der reellen Axe von 0 über 1 nach ∞ und zurück, so hat man in der Bildebene auf Kreisbögen von A über C nach B und zurück nach A zu gehen. Dabei schliessen bei A und C die Kreisbögen den Winkel $\mu\pi$, bei B den Winkel $(2\nu+1)\pi$ ein. Der positiven x_1-Ebene entspricht vermöge der Relation $x_1 = \frac{1-x}{2}$ die negative x-Ebene, indem den Werthen $0, 1, \infty$ hier $+1, -1, \infty$ correspondiren. A B C ist also zugleich die Abbildung der negativen x-Halbebene. x_2 wird für $x_1 = 1$ und $x_1 = 0$ unendlich und für $x_1 = \infty$ null. Wie man aber aus der Relation $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{x_2-1}{x_2}}\right)$ erkennt, ist x_1 in Bezug auf x_2 bei $x_1 = \frac{1}{2}$ verzweigt. Demnach ist Dreieck B D C mit den Winkeln $\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi$, $\mu\pi$ das Bild der positiven, B D A mit denselben Winkeln das Bild der negativen Halbebene x_2.

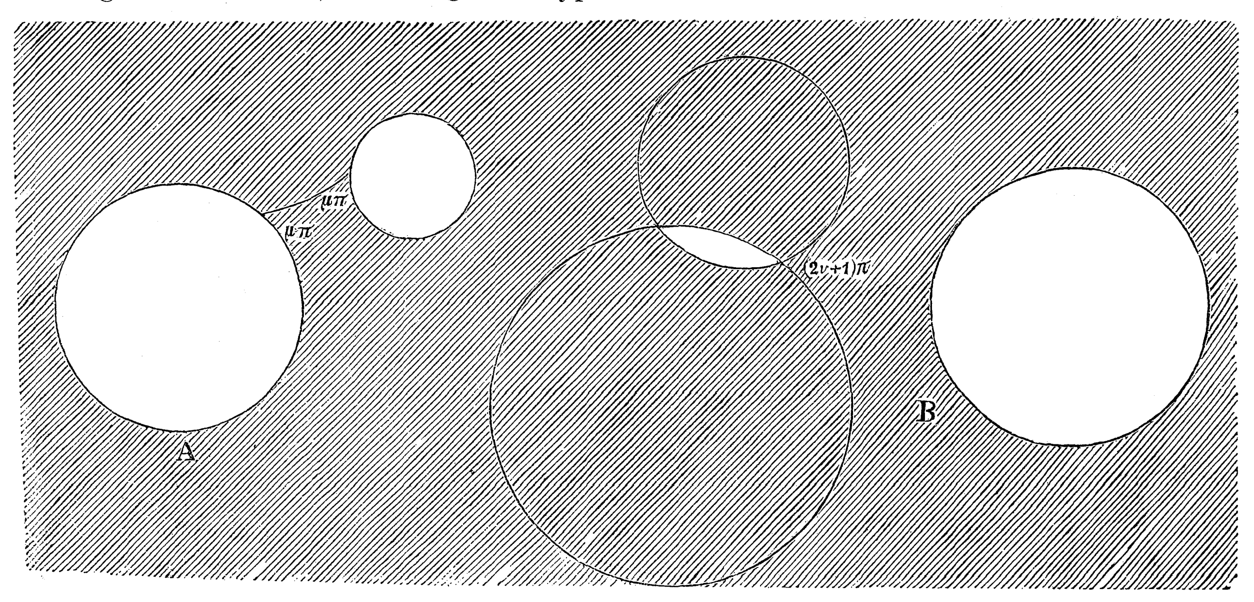


Aus der Beziehung zwischen x_2 und x_3 $x_2 = 4x_3(1-x_3)$ folgt, dass $x_2 = 0$ ein Verzweigungspunkt in Bezug auf die x_3-Ebene ist und daselbst die Werthe 1 und 0 liefert. Man muss also die zwei Dreiecke, welche die x_2-Ebene repräsentiren, mit der Strecke an einander legen, welche den Werthen x_2 gleich 1 bis ∞ entspricht, um die Halbebene x_3 abzubilden. Dies ist in der Figur Dreieck A E B, welches dann in der That die Winkel 2μ, $(2\nu+1)\frac{\pi}{2}$,

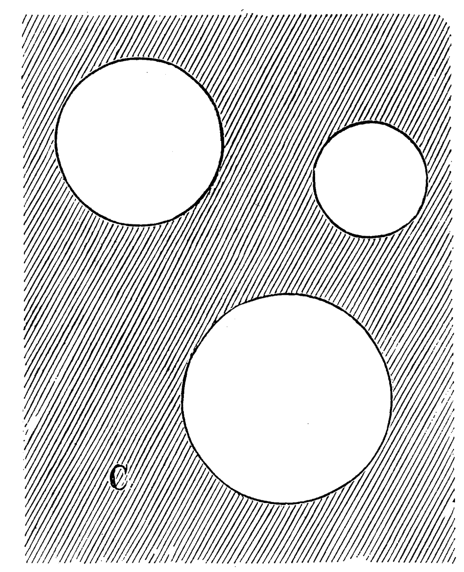
$(2\nu+1)\frac{\pi}{2}$ hat. — Durch Spiegelung an den Seiten der Kreisbogen-Dreiecke erhält man hieraus das Gesammtbild der betreffenden x-Halbebenen, und es hängt von den speciellen Werthen der Parameter ab, ob dieselben Dreiecke wieder reproducirt werden oder nicht. Man übersieht leicht, dass dies eintreten wird, wenn $\frac{2\nu+1}{2}$ oder μ zu 2π commensurabel sind.

Nimmt man die Exponentendifferenzen rein imaginär an, so ergiebt sich bei einfacher Durchführung der Schwarz'schen Rechnungen, dass die Entwickelungen für einen nicht singulären Punkt reelle Coefficienten besitzen, es entsprechen also auch dann noch den reellen Theilen der x-Axe mit Ausschluss der singulären Punkte reelle Kreisbögen, während die Umkreisung der singulären Punkte imaginäre Winkel liefert.

Je nachdem also in der P-Function I) $2\nu+1$ oder μ oder beide imaginär werden, erhalten wir Kreisbogendreiecke mit einem oder zwei oder drei imaginären Winkeln, d. h. folgende Typen:



Hierin deutet die Schraffirung die unendlichfach überdeckten Gebiete an. Durch fortgesetzte Spiegelung erhält man innerhalb der Kreise neue Dreiecke und man erkennt, dass die unendlich vielen Blätter in ∞ vielen Windungspunkten zusammenhängen, in Punkten aber, welche nur auf kleine Gebietstheile beschränkt sind, und die man bei endlicher Wiederholung des Spiegelungsprocesses nie erreicht.



Fall A hat eine besondere Bedeutung, wenn man $\mu = 0$ nimmt. Setzt man nämlich $2\nu + 1 = 2i\nu'$, so ergiebt sich $\nu = -\frac{1}{2} + i\nu'$. A ist also das Bild des Quotienten der Kugelfunctionen mit dem Index $-\frac{1}{2} + i\nu'$. Diese Functionen sind aber nichts anderes als die Mehler'schen Kegelfunctionen[1]). Dadurch sind dieselben in ein neues Licht gesetzt, und wir können allgemein sagen:

Figur A und C sind Bilder des Quotienten der zugeordneten Kegelfunctionen.

Es ist leicht übersichtlich, welche Abbildung die P-Function II) und III) bei imaginären Exponentendifferenzen liefern.

Sobald aber die Differenzen complexe Zahlen werden, so lässt uns unsere Abbildung im Stiche, weil wir sodann auf complexe Winkel geführt werden und für diese keine Veranschaulichung existirt.

§ 2.

Abbildung des Quotienten zweier Cylinderfunctionen.

In nämlicher Weise können wir den Schwarz'schen Satz auf die P-Function IV), also auf die Cylinderfunctionen anwenden.

Wir erhalten dann:

Der Quotient zweier Cylinderfunctionen, die linear unabhängige Particulärintegrale derselben Differentialgleichung sind, bildet die Halbebene x auf ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $2\mu\pi$, $\lim_{\nu=\infty} i\nu\pi$, $\lim_{\nu=\infty} i\nu\pi$ ab.

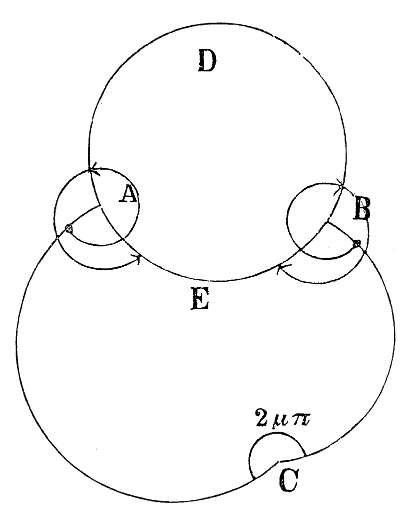
Das heisst aber: An Stelle zweier Winkel treten Windungspunkte unendlich hoher Ordnung, die dritte Seite des Dreiecks verschwindet und die zwei vorhandenen Seiten schliessen den Winkel $2\mu\pi$ ein.

---

[1]) Heine, Handbuch I, p. 301.

Dies lässt sich direct durch Uebergang aus der Abbildung des Quotienten zweier Kugelfunctionen finden:

Da nämlich die Cylinderfunction J_μ entsteht, wenn man in $P_{\mu,n}\left\{\cos\frac{\vartheta}{n}\right\}$ das n unendlich gross werden lässt, so werden wir die Abbildung des Quotienten $\frac{J_\mu}{J_{-\mu}}$ erhalten, wenn wir aus dem Dreiecke, welches $\frac{P_{n\,\mu}}{Q_{n\,\mu}}$ zugehört, diejenigen herleiten, welche $\frac{P_{n+1,\mu}}{Q_{n+1,\mu}}, \frac{P_{n+2,\mu}}{Q_{n+2,\mu}}$ abbilden, und schliesslich $n = \infty$ setzen.



Nehmen wir in der P-Function III) $n = 1$ an, so erhalten wir ein Dreieck mit den Winkeln $\frac{3\pi}{2}, 2\mu\pi, \frac{3\pi}{2}$, also in beistehender Figur das Dreieck A C B D A. Lassen wir nun $n = 2$ werden, so erhalten wir bei A und B die Winkel $\frac{5\pi}{2}$ und unser Dreieck besteht dann aus einer Ebene und dem Dreiecke A C B E A. Wird n wieder um eins grösser, so kommt zu der Ebene Dreieck A C B D A hinzu. Eine abermalige Vergrösserung von n um eins liefert dann zwei Ebenen und das Dreieck A C B E A u. s. w. Bei unendlich grossem n erhalten wir folglich bei A und B Windungspunkte unendlich hoher Ordnung, so dass die Abbildung, welche der Halbebene des Quotienten der Cylinderfunctionen zugehört, aus unendlich vielen Ebenen, die bei A und B im Cyclus zusammenhängen, und dem Zweiecke A C B besteht. Dabei wird die reelle Axe auf die Bögen A C B abgebildet, so dass C dem Punkte $x = 0$, A und B dem Punkte $x = \infty$ entsprechen. Geht man in der x-Ebene vom Nullpunkte aus auf einer beliebigen Geraden ins Unendliche, so bewegt man sich in der Ebene des Quotienten von C aus auf einer Curve, welche sich um A oder B herumwindet, je nachdem der Weg in der Nähe der positiven oder negativen Halbaxe liegt.

Ein einfaches Beispiel liefert hierzu der Quotient

$$w = \frac{J_{\frac{1}{2}}\,x}{J_{-\frac{1}{2}}\,x} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x}{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Diese Function hat die wesentlich singuläre Stelle $x = \infty$, welcher $w = \pm i$ entsprechen, d. h.: Geht man auf der positiven reellen Axe ins Unendliche, so

erhält w den Werth $-i$; nähert man sich dem Punkte ∞ auf der negativen reellen Axe, so wird $w = +i$. Und bei näherer Betrachtung gilt für diese Function der Satz, den beispielsweise Herr Professor Klein in seinem Colleg über Functionentheorie (gelesen Leipzig W-S. 80/81) aufgestellt hat:

Die w-Ebene wird vermöge der Function $w = \operatorname{tg} z$ mit unendlich vielen Blättern überdeckt, welche bei $w = i$ und $w = -i$ im Cyclus zusammenhängen.

Wir erhalten also hier als Zweieck das Stück der imaginären Axe von $+i$ bis $-i$; in diesen Punkten sind die unendlich hohen Winkel, und bei $w = 0$ findet sich der Winkel $[2\mu\pi]_{\mu=\frac{1}{2}} = \pi$.

Es bleibt noch übrig, die Frage zu beantworten, ob sich nicht der aufgestellte Satz auch aus der Theorie der Cylinderfunctionen ergiebt.

Berechnet man die Differentialgleichung dritter Ordnung $\Psi(s, x)$, welche Schwarz für den Quotienten zweier P-Functionen aufgestellt hat, für die Cylinderfunctionen, so erhält man

$$\Psi(s, x) = \frac{1-4\mu^2}{2x^2} + 2$$

und hieraus folgt durch unmittelbare Anwendung der Schwarz'schen Entwickelungen und Sätze, dass der Winkel, der in der Ebene des Quotienten an der singulären Stelle $x = 0$ entsteht, $2\mu\pi$ beträgt. Für die Umgebung des Punktes $x = \infty$ hingegen existiren keine Entwickelungen, da derselbe eine wesentlich singuläre Stelle ist, in deren Nähe also die Function jeden beliebigen Werth (höchstens mit Ausnahme von zweien) unendlich oft annimmt. Es entsteht aber die Frage, ob man nicht durch Annäherung an den Punkt ∞ in bestimmter Richtung doch zu bestimmten Werthen kommen kann. Diese Frage wird von der Theorie der Cylinderfunctionen beantwortet[1]), indem dieselbe zeigt, dass jede Cylinderfunction erster oder zweiter Art, wenn man auf der reellen Axe ins Unendliche fortschreitet, den Werth

$$\frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$$

annimmt, wobei A und B Constante sind. Diese Werthe, die man also durch Annäherung an die wesentlich singuläre Stelle in bestimmter Richtung erhält,

---

[1]) Hankel, Math. Annalen I, p. 500. Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Lommel, Studien über die Besselschen Functionen, p. 108. Heine, Handbuch I, p. 247. C. Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen, p. 49 und 57.

heissen „asymptotische". Demnach findet man für den asymptotischen Werth des Quotienten

$$\frac{A + B\,\mathrm{tg}\,x}{C + D\,\mathrm{tg}\,x},$$

d. h. nähert man sich in der x-Ebene dem Punkte ∞ auf der reellen Axe, so zeigt der Quotient dasselbe Verhalten als die Function $\mathrm{tg}\,x$. Da wir nun bei dem Beispiele $w = \mathrm{tg}\,x$ gesehen haben, dass dem Punkte $x = \infty$ die Punkte $w = \pm i$ zugehören, dass man also zu verschiedenen Werthen kommt, wenn man nach Unendlich auf der positiven oder negativen reellen Axe geht, so ist damit gezeigt, dass in der That die Abbildung des Quotienten zweier Cylinderfunctionen auf das oben beschriebene Kreisbogenzweieck führt.

III.

Der Verlauf der Kugel- und Cylinderfunctionen im reellen Gebiete.

Disposition.

In § 4 des ersten Theiles erkannten wir, dass die Kugelfunctionen mit ganzzahligen Indices sich in zwei Gruppen trennen. Die eine wird gebildet von den Functionen, bei denen $m \leqq n$ ist, die andere von denen, wo $m > n$ ist. Die Functionen der ersten Gruppe sind definirt durch

$$P_{nm} = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{d x^m},$$

$$Q_{nm} = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n}{d x^m},$$

wobei unter P_n und Q_n die gewöhnlichen Kugelfunctionen erster und zweiter Art zu verstehen sind. Da nun die Functionen erster Art dieser Gruppe algebraisch, die zweiter Art transcendent sind, so haben wir zu behandeln, wenn $m \leqq n$ ist, 1) die Functionen P_{nm}, 2) die Functionen Q_{nm} nebst den aus ihnen für den Fall $m = 0$ und $n = \infty$ hervorgehenden Functionen.

Ist aber $m > n$, so gilt die Definition von P_{nm} nicht mehr, da P_n eine ganze Function n-ten Grades ist. Wir sahen, dass dann die von uns als Kugelfunctionen definirten Particulärintegrale identisch mit den S_{nj} und T_{nj} des Herrn F. Neumann wurden. Beide Functionen sind algebraisch. Wir behandeln sie in § 3. Die Definition von Q_{nm} bleibt auch in diesem Falle noch bestehen. Diese Function muss sich also linear aus S und T zusammensetzen. Es gilt

$$Q_{nm} = S_{nm} - T_{nm},$$

und daraus findet man durch eine kleine Rechnung als zugehöriges zweites Particulärintegral der Differentialgleichung

$$P_{nm} = S_{nm} + T_{nm}.$$

Die Curven dieser Functionen stellen wir der Vollständigkeit halber in § 3 mit auf. Die in diesem Theile verwendeten Formeln sind durchweg aus Herrn F. Neumann's Beiträgen zur Theorie der Kugelfunctionen entnommen. Wir unterlassen daher die darauf bezüglichen Citate.

---

§ 1.

Die Curven $y = P_{nm}$[1], $m \leqq n$ und $y = J_m$.

Die Definition von P_{nm} ist:

$$1)\quad P_{nm} = C(1-x^2)^{\frac{m}{2}} x^{n-m}\left(1 - \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4} - \ldots\right)$$

oder

$$2)\quad P_{nm} = (1-x^2)\,\frac{d^m P_n}{d x^m}.$$

Setzt man in 1) $-x$ für x ein, so ändert sich das Zeichen bei geradem $n-m$ nicht, während dies bei ungeradem $n-m$ eintritt. Also ergeben sich für unsere Curven sofort die Sätze:

Ist $n-m$ eine gerade Zahl, so liegen die Curven $y = P_{nm}$ symmetrisch zur y-Axe.

Ist $n-m$ ungerade, so erhält man den Theil der Curve für negatives x aus dem für positives x durch Spiegelung an den Axen des Coordinatensystems.

Aus 2) ergiebt sich Folgendes: P_n ist als ganze Function nebst seinen Ableitungen eindeutig; und da ferner diese letzteren, wie Herr Most[2]) gezeigt hat, in Reihen mit lauter positiven Coefficienten entwickelbar sind, welche

---

[1]) Für $P_{6,m}$ und $P_{7,m}$ findet man bei Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik 1871, p. 336, Tabellen und auch Zeichnungen, aber ohne jede Erklärung. Dieselben finden sich auch unverändert in der neuen englischen Ausgabe (Treatise on natural philosophy 1883) wieder.

[2]) Crelle 70, p. 167.

nach P_{n-k} fortschreiten, diese Functionen aber für $x > 1$ auch grösser als 1 bleiben, so ist $\frac{d^m P_n}{d x^m}$ immer eindeutig und für $x > 1$ positiv. Demnach ist die Vieldeutigkeit und das Zeichen für $x > 1$ von $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ abhängig. Dies wird aber bei ungeradem m für diese Werthe imaginär, bei geradem m für $\frac{m}{2} = 2k$ positiv und für $\frac{m}{2} = 2k+1$ negativ. Also gilt:

Die Curven $y = P_{n, 2\lambda+1}$ sind nur reell für $x \leq 1$ und bestehen entsprechend den beiden Werthen von $\sqrt{1-x^2}$ aus zwei Zweigen.

Die Curven $y = P_{n, 2\lambda}$ bestehen aus einem Zug, der für $x > 1$ auf der positiven oder negativen Seite der x-Axe verläuft, je nachdem λ gerade oder ungerade ist.

Die Punkte ± 1 sind singuläre Punkte der Curven, da für sie ausser y die $(\lambda-1)$ ersten Ableitungen verschwinden. Folglich erhält man mit Rücksicht auf die Zweideutigkeit bei ungeradem m den Satz:

In den Punkten ± 1 haben die Curven $y = P_{n, 2\lambda}$ mit der x-Axe λ consecutive Punkte gemein, während bei den Curven $y = P_{n, 2\lambda+1}$ die beiden Zweige sich an diese Punkte heranziehen und dort Spitzen bilden.

Nunmehr bleibt uns noch übrig, die Schnittpunkte mit der x-Axe, die Culminations- und Wendepunkte aufzusuchen. Da die Wurzeln von P_n alle reell und verschieden sind und zwischen ± 1 liegen, so gilt dies nach einem bekannten Satze der Algebra[1]) auch für sämmtliche Differentialquotienten.

Demnach schneiden die Curven $y = P_{nm}$ die x-Axe in $n-m$ getrennten Punkten, welche symmetrisch zwischen ± 1 liegen.

Für die Culminations- und Wendepunkte ist y' resp. $y'' = 0$. Ist nun $m = 2\lambda$, so ist y eine ganze Function n-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln, welche zwischen ± 1 liegen resp. ± 1 sind. In Folge dessen können wir hierauf den eben genannten Satz anwenden und finden:

Ist $m = 2\lambda$, so haben die Curven $y = P_{nm}$ $n-m+1$ Culminationspunkte und $n-m+2$ Wendungen, welche alle zwischen ± 1 gelegen und von einander verschieden sind.

---

[1]) Serret, Handbuch der höheren Algebra I, p. 224.

Für $m = 2\lambda + 1$ haben wir nach 2) die Gleichung

$$y^2 = (1 - x^2)^m (G_{n-m})^2 = G_{2n},$$

wo G eine ganze Function und der untere Index den Grad derselben bedeutet. Hieraus ergiebt sich durch Differentiation:

$$y' = (1 - x^2)^{\frac{m}{2} - 1} G_{n-m+1} \text{ oder } 2yy' = G'_{2n}.$$

Da nun G_{2n} eine ganze Function n-ten Grades ist, deren Wurzeln reell sind und zwischen ± 1 liegen, so kann auch y' nur für reelle Werthe von x verschwinden. G'_{2n} ist vom Grade $2n - 1$; y verschwindet für $n - m$ Werthe; also muss y' für $n - m - 1$ reelle Werthe von x verschwinden. Hierunter befinden sich aber $2(m - 1)$ Wurzeln ± 1. Demnach bleiben auch hier $n - m + 1$ Culminationspunkte. Diese sind jedoch, da doppelte Vorzeichen auftreten, zweimal zu rechnen. Genau dasselbe Verfahren können wir auf y' anwenden, um die Zahl der Wurzeln von y'' zu erhalten. Hieraus ergiebt sich:

Die Curven haben, wenn m ungerade ist, $2(n - m + 1)$ Culminationspunkte und $2(n - m + 2)$ Wendungen, bei denen allen der zugehörige Werth von x zwischen ± 1 liegt.

Diese Sätze sind hinreichend, die Gestalten der Curven aufzustellen. Wir erhalten die sechs auf Tafel 1, 1) gezeichneten Figuren und finden für gegebenes n und m den zugehörigen Typus aus folgendem Schema:

$n - m$ gerade			$n - m$ ungerade		
$m = 2\lambda$		$m = 2\lambda + 1$		$m = 2\lambda$	
$\lambda = 2k$	$\lambda = 2k + 1$			$\lambda = 2k$	$\lambda = 2k + 1$
I	II	III	VI	IV	V

Die gewöhnlichen Kugelfunctionen ergeben sich aus den Zugeordneten, wenn man $m = 0$ setzt. Dadurch verschwinden die Singularitäten in den Punkten ± 1, und die Functionen nehmen daselbst den Werth ± 1 an. Die eben aufgestellten Sätze modificiren sich leicht und lassen sich in den folgenden zusammenfassen:

Die Curven $y = P_n$ schneiden die x-Axe n-mal in Punkten, die zwischen ± 1 gelegen sind, haben $n - 1$ Culminationspunkte und $n - 2$ Wendungen. Ist n gerade, so ist die y-Axe Symmetrieaxe;

ist n ungerade, so erhält man die eine Hälfte der Curve aus der anderen durch Spiegelung an den Axen des Coordinatensystems.

Genaue Zeichnungen der Curven P_1 bis P_7 finden sich nebst ausführlichen Tabellen in den Reports of the British Association for the advancement of science 1879 p. 46 ff. Vergl. ausserdem: C. Neumann, Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen p. 81 ff.

Als zweiter Specialfall ist zu erwähnen $n = \infty$. Wir erhalten dann die Cylinderfunctionen erster Art, die definirt sind durch die Gleichung

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma n+p+1\, \Gamma p+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

Für sie gilt ebenfalls der Satz, dass alle Wurzeln reell sind. Von denselben ist $x = 0$ eine m-fache Wurzel, die anderen aber sind getrennt und die Differenz zweier auf einander folgender nähert sich mit wachsendem x der Grenze π. Zwischen je zwei Schnittpunkten der Curve mit der x-Axe hat dieselbe abwechselnd ein Maximum oder Minimum und zwischen zwei Culminationspunkten eine Wendung. Mit Benutzung der für J_0 und J_1 aufgestellten Tafeln, der für die J geltenden Recursionsformeln und der asymptotischen Werthe kann man daher mit Leichtigkeit die betreffenden Curven construiren. In Tafel 1, 3) sind die geradem und ungeradem m entsprechenden Typen durch die punktirten Curven dargestellt. Sie gleichen Wellenlinien, die sich vom Punkte 0 aus immer mehr abflachen, während die Wellenlänge sich immer mehr der constanten Grenze 2π nähert.

§ 2.

Die Curven $y = Q_{nm}(x)$, $m \leqq n$ und $y = Y_m$.

Als Definition von Q_{nm} gilt

$$1)\quad y = Q_{nm} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n}{d x^m},$$

ein Ausdruck, der sich nach negativen Potenzen von x in folgender Weise entwickeln lässt:

$$2)\quad y = Q_{nm} = C(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} (x^{n-m-1} + a x^{m-n+3} + \ldots).$$

Hierin convergirt die in Klammern stehende Reihe für $m \leqq n$ ausserhalb des Einheitskreises (während sie für $m > n$ von selbst abbricht). Betrachten wir

nun zunächst die Curven für Werthe von x, die grösser als eins sind, so erkennen wir aus 2), dass für ungerades m die Curve imaginär wird. Die Reihe 2) ist für positives x immer positiv. Demnach ist das Zeichen von y durch $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ bestimmt. Für gerades m gilt also: Die Curve verläuft für $x > 1$ in der positiven Halbebene, wenn $\frac{m}{2}$ gerade, und in der negativen, wenn $\frac{m}{2}$ ungerade ist.

Da ferner

$$Q_n = P_n \log \frac{x+1}{x-1} - R_n$$

und der Differentialquotient von $\log \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{1-x^2}$ ist, so erhält man bei m-facher Differentiation von Q_n nach x ein Glied von der Form

$$\frac{G}{(1-x^2)^m},$$

in $Q_{n\,m}$ findet sich also ein Glied von der Form

$$\frac{G}{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}},$$

es wird also für $x = \pm 1$ unendlich. 2) zeigt, dass $y = 0$ ist für $x = \infty$. Demnach gilt der Satz:

Unsere Curven haben die Geraden ± 1 und $y = 0$ zu Asymptoten.

Für die Culminationspunkte ist $Q'_{n\,m} = 0$. Dann ergiebt sich aus der Differentialgleichung

$$Q''_{n\,m} = \frac{-n(n+1)(1-x^2)+m^2}{(1-x^2)^2} Q_{n\,m}$$

oder mit Hülfe von 1)

$$Q''_{n\,m} = \frac{(x^2-1)(n+1)n+m^2}{(1-x^2)^2} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n}{d x^m}.$$

Hierin ist der erste und letzte Factor für unser Intervall immer positiv [1]), demnach ist das Vorzeichen von $Q''_{n\,m}$ positiv oder negativ, je nachdem $\frac{m}{2}$ gerade oder ungerade ist, d. h. unsere Curve kann im ersten Falle nur Minima, im letzten nur Maxima haben; da sie aber stetig vom Punkte $x = 1$, $y = \infty$ bis $x = \infty$, $y = 0$ verläuft, so können Culminationspunkte überhaupt nicht auftreten, und $Q'_{n\,m}$ muss für alle Werthe von $x > 1$ immer dasselbe Zeichen behalten, und zwar das entgegengesetzte von $Q_{n\,m}$. Dies ermöglicht es uns, die

---

[1]) Most, Crelle 70, p. 168.

Frage nach den Wendepunkten zu beantworten. Nach der Differentialgleichung gilt für den zweiten Differentialquotienten:

$$Q''_{nm} = -\frac{2x}{x^2-1} Q'_{nm} + \frac{n(n+1)(x^2-1)+m^2}{(1-x^2)^2} Q_{nm}.$$

Er wird also nach dem, was über das Zeichen von Q'_{nm} bemerkt wurde, in unserem Intervall niemals null und hat dasselbe Zeichen als Q_{nm}. Also gilt:

Die Curven kehren im Intervalle 1 bis ∞ ihren Asymptoten immer die convexe Krümmung zu.

Nunmehr bleibt noch übrig, das Verhalten von y für $-1 < x < +1$ zu erörtern. Dann wird aber das logarithmische Glied imaginär, so dass nur reelle Punkte resultiren, wenn die Function verschwindet, mit welcher der Logarithmus multiplicirt ist. Diese ist aber nichts anderes als

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{d x^m}.$$

Sie verschwindet also für die $n-m$ symmetrisch zum Nullpunkte gelegenen Werthe von $\frac{d^m P_n}{d x^m}$.

Also haben die Curven zwischen $x = -1$ und $x = +1$ $n-m$ isolirte Punkte, welche wegen der Vieldeutigkeit des Logarithmus von unendlich hoher Multiplicität sind.

Berücksichtigt man endlich noch die aus 1 sich ergebende Relation

$$Q_{nm}(-x) = (-1)^{n+1-m} Q_{nm}(x),$$

so findet man im Ganzen sechs Typen (Tafel 1, II), die sich für gegebenes n und m genau dem für die P_{nm} gegebenen Schema einordnen.

Auch hier erhalten wir für $m = 0$ die gewöhnlichen Kugelfunctionen zweiter Art. Die eben gefundenen Sätze ändern sich leicht um, und man erhält:

Die Curven $y = Q_n$ haben zwischen $x = \pm 1$ n isolirte Punkte von unendlich hoher Multiplicität, den Wurzeln von P_n entsprechend, und tragen bei geradem n den Typus 2, I, bei ungeradem n den Typus 2, IV.

$n = \infty$ ergiebt, wie früher erwähnt, die Cylinderfunctionen zweiter Art Y_m. Um die dieser Function zugehörigen Curven zu erhalten, betrachten wir zunächst die des Quotienten

$$q = \frac{Y_m}{J_m} = \int \frac{C}{x J_m^2}$$

und suchen jene hieraus mit Hülfe der für die J_m gefundenen abzuleiten.

Es ist

$$3)\quad q = \log\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \mathfrak{P}\left(\frac{x}{2}\right)$$

und

$$4)\quad q' = \frac{C}{x J_m^2},$$

also

$$q'' = -\frac{C}{x^2 J_m^3}\left\{J_m + 2x J'_m\right\}$$

oder mit Benutzung der recurrenten Relation:

$$x J'_m = m J_m - x J_{m+1},$$

$$q'' = -\frac{C}{x^2 J_m^3}\left((2m+1) J_m - 2x J_{m+1}\right).$$

Aus 4) erkennt man, dass die Curven im Endlichen weder Maximum noch Minimum haben und fortwährend steigen. Der zweite Differentialquotient verschwindet unendlich oft, denn die Curve $(2m+1) J_m - 2x J_{m+1}$ schneidet, wie man leicht aus dem erkennt, was für die J_m gesagt worden ist, die x-Axe in unendlich vielen Punkten. Da nun q für $x = 0$ und alle Nullpunkte von J_m unendlich wird, so können wir sagen:

Die Curven $q = \frac{Y_m}{J_m}$ zeigen ähnliches Verhalten als die Curven $y = \operatorname{tg}(x)$.

Dies stimmt mit dem überein, was im zweiten Theile über die Abbildung des Quotienten zweier Cylinderfunctionen gesagt worden ist.

Beachtet man nun noch, dass q eine gerade Function ist, so findet man das Tafel 1, III) mit Strichen und Punkten gezeichnete Curvensystem. Verbindet man dasselbe mit den Curven $y = J_m$, wobei zu beachten ist, dass diese ihre Nullpunkte an den Stellen haben, wo die ersteren unendlich werden, und dass J_m, wie aus der Reihe 3) folgt, für diese Werthe endlich wird, so resultirt für Y_m eine Wellenlinie, welche die x-Axe in den Punkten schneidet, wo $q = 0$ wird. Nur im Punkte $x = 0$ geht die Curve noch ins Unendliche, weil daselbst der Logarithmus unendlich wird. Da nun Y_m mit J_m gerade oder ungerade Functionen sind, je nachdem m gerade oder ungerade ist, so erhält man die in Tafel 1, III) ausgezogenen Curven.

Nebenbei haben wir für die Function Y_m den neuen Satz gefunden:

Die Function Y_m hat unendlich viele reelle Wurzeln, welche sich ebenso wie die Wurzeln von J_m mit wachsendem x der Grenze π nähern.

§ 3.

Die Curven der Kugelfunctionen, wenn $m > n$ ist.

Die Functionen, welche bei $m > n$ sich als zwei linear unabhängige Particulärintegrale der Differentialgleichung der Kugelfunctionen ergaben und im Einklange mit unserer im I. Theile § 4 gegebenen Definition der Kugelfunctionen stehen, nennt Herr F. Neumann S_{nm} und T_{nm}.

Vermöge der Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} S_{nm}(-x) = (-1)^{m+n}\, T_{nm}(x) \\ T_{nm}(-x) = (-1)^{m+n}\, S_{nm}(x), \end{cases}$$

haben wir nur den Verlauf der Curven für positives x zu studiren. Dies lässt sich für T_{nm} direct durchführen, für S_{nm} jedoch nicht, weil hierbei die Discussion einer Gleichung n-ten Grades mit alternirenden Vorzeichen erforderlich ist und man über die Wurzelwerthe derselben von vornherein nichts aussagen kann.

Weil aber die Beziehung existirt

$$Q_{nm} = S_{nm} - T_{nm}$$

und Q_{nm} durch geschlossene Ausdrücke darstellbar ist, so ergiebt sich von selbst folgender Weg der Untersuchung. Wir betrachten zunächst die Curven $y = Q_{nm}$, die sich leicht darstellen lassen, sodann die Curven $y = T_{nm}$ für positives x und finden als deren Summe die Curven $y = S_{nm}$ für positives x, woraus sich dann der Verlauf für negatives x mit Hülfe der Gleichungen 1) ergiebt. Zum Schlusse bleibt dann noch übrig, die Curven $y = P_{nm}$ zu zeichnen, welche wir oben als

$$y = S_{nm} + T_{nm}$$

definirt haben.

Die Function $y = Q_{nm}$ ist definirt durch

$$Q_{nm} = C\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(x^{m-n-1} + a\,x^{m-n-3} + \dots\right),$$

also durch eine endliche Reihe mit lauter positiven Coefficienten. Hieraus ergiebt sich sofort die Relation

$$Q_{nm}(-x) = (-1)^{m-n-1}\, Q_{nm}(x)$$

und der Satz:

Die Curven $y = Q_{nm}$ haben die Geraden $y = 0$ und $x = \pm 1$ zu Asymptoten.

Für die ersten zwei Differentialquotienten erhält man:

$$y' = C'\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{m+2}{2}}\left(a'x^{m-n} + b'x^{m-n-2} + \ldots\right),$$

$$y'' = C''\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{m+4}{2}}\left(a''x^{m-n+1} + b''x^{m-n-1} + \ldots\right).$$

Hierin sind die Coefficienten $a'b'\ldots a''b''\ldots$ sämmtlich positiv, wie durch Ausrechnen leicht eruirt werden kann. Ist $m-n$ ungerade, so enthält die Reihe für y' den Factor x, ist $m-n$ gerade, so ist dies bei der Reihe für y und y'' der Fall. Für reelle Werthe von x verschwindet also, abgesehen vom Werthe $x = 0$, weder der erste noch der zweite Differentialquotient. Daher gilt der Satz:

Die Curven $y = Q_{nm}$ haben bei $x = 0$ und nur bei $x = 0$ einen Culminationspunkt, wenn $m-n$ ungerade ist, und einen Wendepunkt, wenn $m-n$ gerade ist.

Für $x > 1$ wird das Vorzeichen von y durch den Factor $(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}$ bestimmt oder es ergeben sich für ungerades m imaginäre Werthe. Demnach gilt:

Die Curve $y = Q_{n,2\lambda}$ verläuft immer auf der positiven Seite der x-Axe, wenn λ gerade, und auf der negativen, wenn λ ungerade ist.

Die Curven $x = Q_{n,2\lambda+1}$ sind nur reell für Werthe von x, die zwischen ± 1 liegen und bestehen den beiden Werthen von $\sqrt{1-x^2}^{\,-2\lambda-1}$ entsprechend aus zwei Zügen.

Diese Angaben sind hinreichend, die Gestalten der Curven angeben zu können. Sie theilen sich im Wesentlichen in sechs Typen (Tafel 2, III), welche sich dem p. 39 aufgestellten Schema einordnen.

Wir kommen jetzt zu den Curven $y = T_{nm}$. Dafür gilt innerhalb des Einheitskreises die Entwickelung

$$y = (-1)^{m+1}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left[\left\{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots\right\} - \left\{a_1x + a_3x^3 + \ldots\right\}\right]$$

oder der geschlossene Ausdruck

$$2)\quad y = (-1)^{m-n}(-1)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{m}{2}}\left\{a_0 + a_1\frac{x+1}{2} + a_2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \ldots a_n\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\},$$

worin alle Coefficienten positiv sind. Aus dieser Definition folgt unmittelbar:

Ist $m = 2\lambda + 1$, so wird die Curve T_{nm} für Werthe von x, die grösser als 1 sind, imaginär, während sie für $-1 < x < 1$ aus zwei Zügen besteht, die symmetrisch zur x-Axe gelegen sind.

Für $x = 0$ bleibt y endlich, für $x = 1$ ist $y = 0$. Da nun aber für diesen Werth, wenn $m = 2\lambda$ ist, die $(\lambda - 1)$ ersten, und wenn $m = 2\lambda + 1$ ist, die λ ersten Ableitungen verschwinden, so folgt:

Bei $x = 1$ hat die Curve $y = T_{n, 2\lambda}$ λ Punkte mit der x-Axe gemein und $y = T_{n, 2\lambda+1}$ eine Spitze.

Verschwände in dem Intervall 0 bis 1 der erste Differentialquotient, so hätte man zufolge der Differentialgleichung:

$$T''_{nm} = \frac{-n(n+1)(1-x^2) + m^2}{(1-x^2)^2} T_{nm}.$$

Der Factor $-n(n+1)(1-x^2) + m^2$ bleibt immer positiv; denn der grösste Werth von $1-x^2$ ist hier 1 und weil $m > n$, also mindestens $m = n+1$ ist, so erhält man die Ungleichung

$$(n+1)^2 > n(n+1).$$

Demnach hat T''_{nm} dasselbe Zeichen als T_{nm}, und da aus 2) folgt, dass T_{nm} für unser Intervall positiv ist oder negativ, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so kann unsere Curve, wenn n gerade ist, nur Minima, wenn n ungerade, nur Maxima haben. Wir haben aber eben gesehen, dass die Curve bei $x = 1$ an die x-Axe herankommt, sonst aber entweder auf der positiven oder negativen Seite derselben liegt; also kann weder Maximum noch Minimum auftreten, woraus folgt, dass T'_{nm} das entgegengesetzte Zeichen von T_{nm} hat. Die Curve hat aber auch keinen Wendepunkt. Um dies nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass

$$3)\quad \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{-n(n+1)(1-x^2) + m^2}{(1-x^2)^2} y \gtrless 0$$

ist.

Die Gleichung 2) können wir schreiben:

$$y = (-1)^n \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}} G_n,$$

also

$$y' = (-1)^n \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}} \left\{\frac{-mx}{1-x^2} G_n + G'_n\right\}.$$

Ist n gerade, so ist y positiv, y' negativ, also:

$$G'_n < \frac{mx}{1-x^2} G_n;$$

daraus erhalten wir durch Substitution in 3):

$$\frac{n(n+1)(1-x^2)+m^2}{1-x^2} G_n > \left(\frac{-mx}{1-x^2} G_n + G'_n\right) 2x.$$

Die rechte Seite wird 0, wenn wir für G'_n den grösseren Werth $\frac{mx}{1-x^2} G_n$ einsetzen, y'' bleibt also für unser Intervall immer positiv, wenn y positiv ist, oder, wie ganz analog für ungerades n geschlossen wird, negativ, wenn y negativ ist.

Geht nun x von 1 bis ∞ (m als gerade vorausgesetzt), so ergiebt sich genau wie vorhin, dass die erste Ableitung dasselbe Zeichen als y hat, wenn man nur beachtet, dass y für $x = \infty$ auch ∞ wird. Für die zweite Ableitung erhält man dann dasselbe Resultat, wenn man die Form

$$y = C\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{m}{2}} G_n$$

successive differentiirt und die Vorzeichen von y und y' in Rücksicht zieht. y selbst ist positiv, wenn $\frac{m}{2}$ gerade und n gerade oder $\frac{m}{2}$ ungerade und n ungerade ist, sonst negativ.

Demgemäss erhalten wir die sechs (Tafel 2, I) gezeichneten Typen. III und VI sind nur dadurch verschieden, dass bei geradem n der obere Zug den positiven Wurzelwerthen, der untere den negativen entspricht, während dies bei ungeradem n umgekehrt ist.

Es bleibt nun nur noch übrig, die Curven $y = S_{nm}$ zu finden. Da wir aber die Definition haben $S_{nm} = Q_{nm} + T_{nm}$, so haben wir nur nöthig, die Curven Q_{nm} mit denen von T_{nm} zusammenzunehmen, die mit gleicher Zahl bezeichnet sind. Wir erhalten auf diese Weise ebenfalls sechs Hauptformen (Tafel 2, II). Bei Aufstellung derselben könnte man nur im Zweifel sein, ob diejenigen Curventheile richtig gezeichnet sind, die zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = 1$ liegen. Denn möglicher Weise könnte ein Minimum auftreten. Aus der Definitionsgleichung

$$S_{nm} = C\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{m}{2}} \left\{\frac{1}{m} - \frac{n(n+1)}{m(m+1)} \frac{x+1}{2} + \ldots (-1)^n c \left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$$

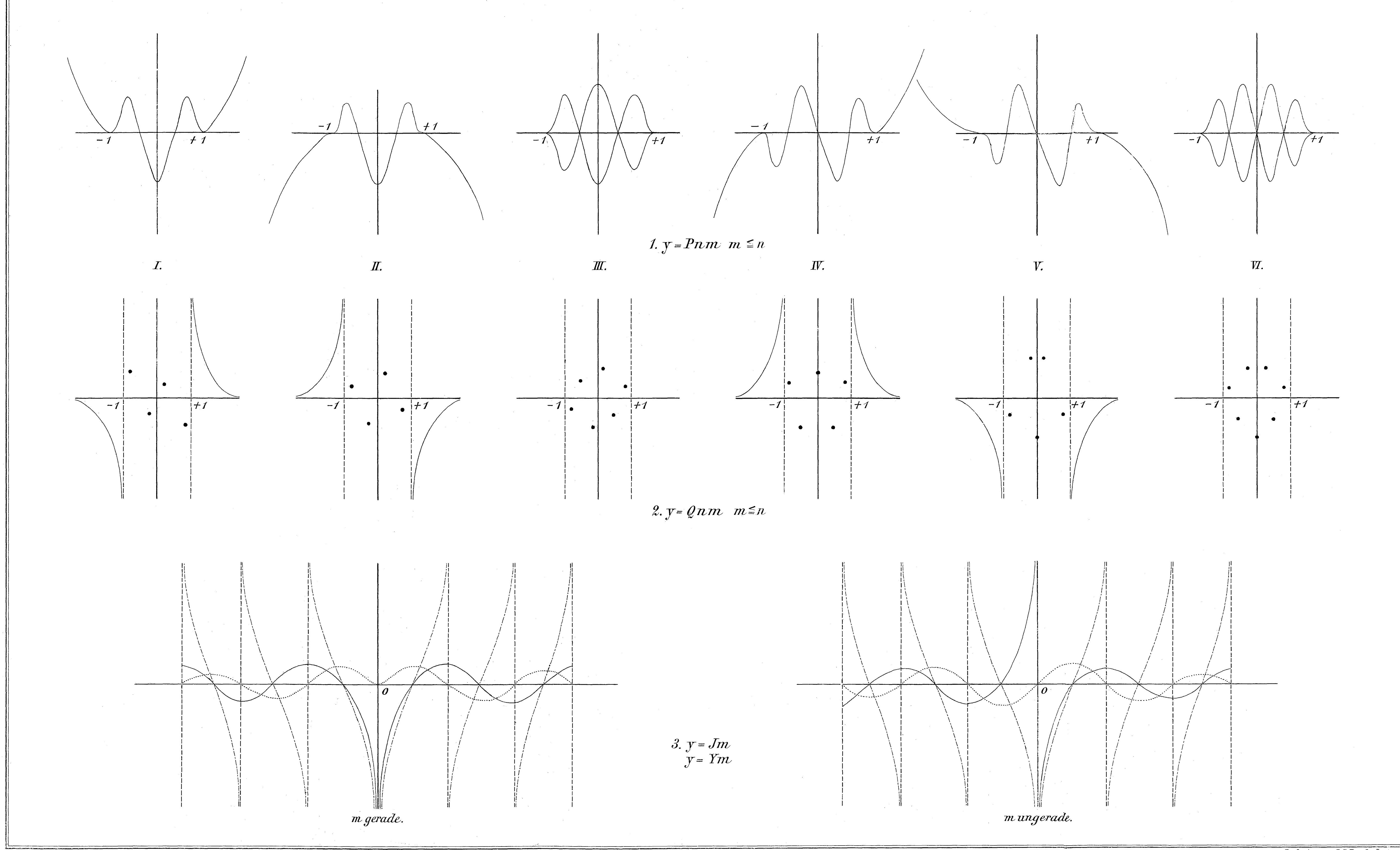
folgt jedoch mit Hülfe der Differentialgleichung, dass für $y' = 0$ y'' dasselbe Zeichen als y hat. Es könnte also nur ein Culminationspunkt auftreten, wenn y' für $x = 0$ und $x = 1$ entgegengesetzte Zeichen hätte. Dies ist aber nicht der Fall.

Nebenbei ergiebt sich der neue Satz:

Die ganze Function, welche den zweiten Bestandtheil von S_{nm} bildet, hat, wenn n gerade ist, keine reelle Wurzel, wenn n ungerade ist, nur eine.

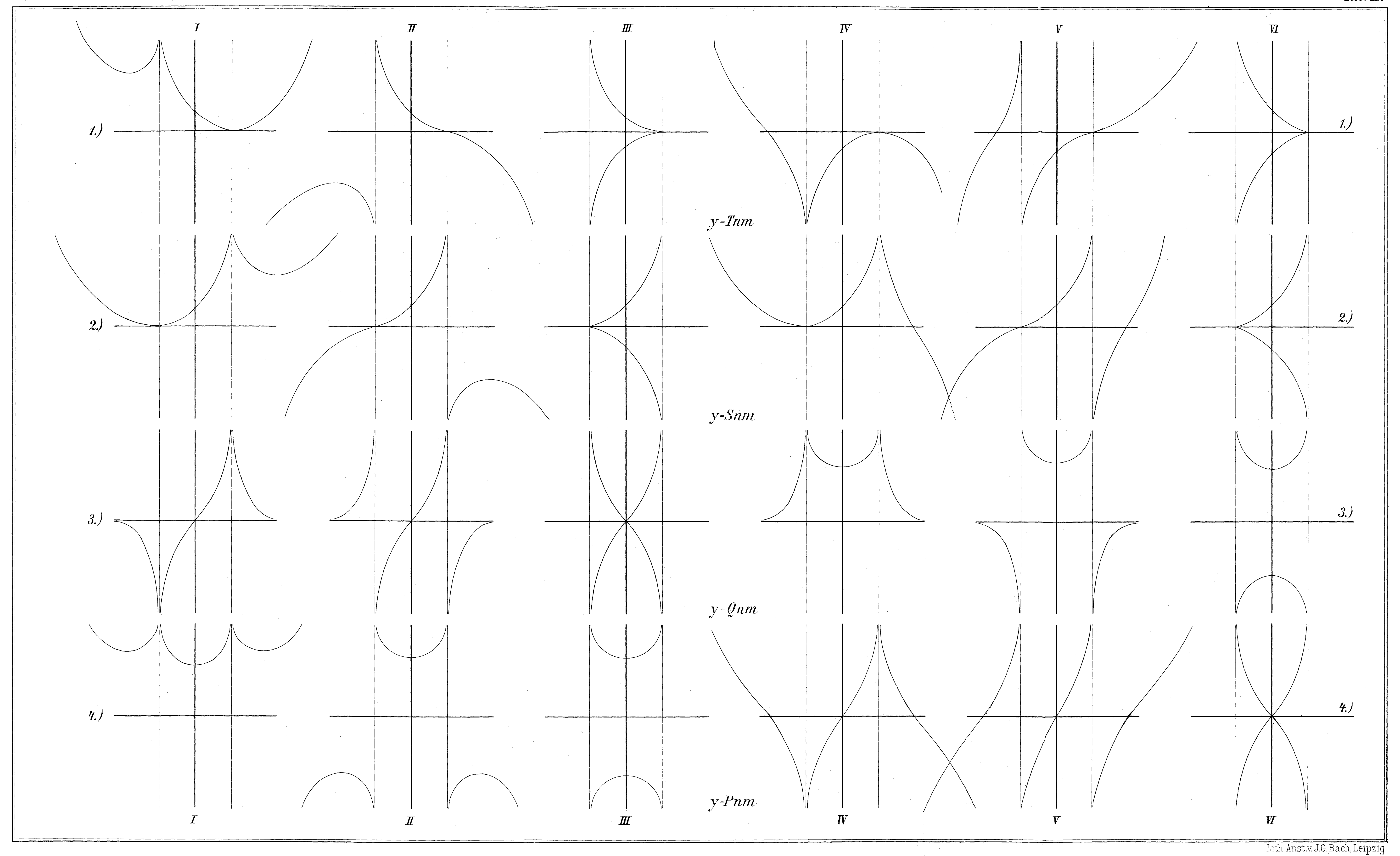
Die angeführten Sätze genügen, die ganzen Curven für die Functionen S_{nm}, T_{nm}, Q_{nm}, P_{nm} zu construiren. Die Tafel 2 giebt die vollständige Uebersicht über die sechs Curvenarten.

Die Kugelfunctionen trennen sich sonach in ihrem Verlaufe im reellen Gebiete in sechs Klassen, je nachdem n, m und $\frac{m}{2}$ gerade oder ungerade sind, und ordnen sich demzufolge alle in das p. 39 aufgestellte Schema ein.



Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig.

R. Olbricht: Kugel- und Cylinderfunctionen. Taf. 1.



Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig

R. Olbricht: Kugel- und Cylinderfunctionen. Taf. 2.